سلسلة 1	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1 :

$$z_1 = (5\boldsymbol{i}-1)(\boldsymbol{i}+3)$$
$$z_1 = 5\boldsymbol{i}^2 + 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{i} - 3$$
$$z_1 = -5 + 4\boldsymbol{i} - 3$$
$$z_1 = -8 + 4\boldsymbol{i}$$

$$z_2 = (7\boldsymbol{i}-1)^2$$
$$z_2 = (7\boldsymbol{i})^2 - 14\boldsymbol{i} + 1$$
$$z_2 - 49 - 14\boldsymbol{i} + 1$$
$$z_2 = -48 - 14\boldsymbol{i}$$

$$z_3 = (\boldsymbol{i}+2)^3$$
$$z_3 = \boldsymbol{i}^3 + 3\times\boldsymbol{i}^2\times 2 + 3\times\boldsymbol{i}\times 2^2 + 2^3$$
$$z_3 = -\boldsymbol{i} - 6 + 12\boldsymbol{i} + 8$$
$$z_3 = 2 + 11\boldsymbol{i}$$

$$z_4 = (3-\boldsymbol{i})^4$$
$$z_4 = \left[(3-\boldsymbol{i})^2\right]^2$$
$$z_4 = (9 - 6\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}^2)^2$$
$$z_4 = (9 - 6\boldsymbol{i} - 1)^2$$
$$z_4 = (8 - 6\boldsymbol{i})^2$$
$$z_4 = 64 - 96\boldsymbol{i} + (6\boldsymbol{i})^2$$
$$z_4 = 64 - 96\boldsymbol{i} - 36$$
$$z_4 = 28 - 96\boldsymbol{i}$$

$$z_5 = \frac{5}{2-\boldsymbol{i}} + \frac{3-\boldsymbol{i}}{2+\boldsymbol{i}}$$
$$z_5 = \frac{5(2+\boldsymbol{i})}{2^2-\boldsymbol{i}^2} + \frac{(3-\boldsymbol{i})(2-\boldsymbol{i})}{2^2-\boldsymbol{i}^2}$$
$$z_5 = \frac{10+5\boldsymbol{i}}{4+1} + \frac{6-3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}^2}{4+1}$$
$$z_5 = \frac{10+5\boldsymbol{i}+6-5\boldsymbol{i}-1}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$z_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$$
$$z_6 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^5$$
$$z_6 = \left(\frac{2}{4} + \boldsymbol{i} - \frac{2}{4}\right)^5$$
$$z_6 = \boldsymbol{i}^5 = \boldsymbol{i}^2\times\boldsymbol{i}^2\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}$$

في كل الحسابات نطبق القواعد المعروفة في المجموعة IR من نشر و تعميل و متطابقات و ... مع استعمال المتساوية $\boldsymbol{i}^2 = -1$ دون تحديد قيمة معينة للعدد العقدي $\boldsymbol{i}$ فهو أساس بناء مجموعة الأعداد العقدية.

تمرين 2 : لنحل في C المعادلات :

لدينا : $z + \boldsymbol{i} = -2z + 7$ ، $z + 2z = 7 - \boldsymbol{i}$ منه : $3z = 7 - \boldsymbol{i}$ ، $z = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\boldsymbol{i}$ منه : $S = \left\{\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\boldsymbol{i}\right\}$

لدينا : $\boldsymbol{i} - z = \boldsymbol{i}z - 3$ ، $-z - \boldsymbol{i}z = -3 - \boldsymbol{i}$ ، $-z(1+\boldsymbol{i}) = -3 - \boldsymbol{i}$ منه : $z = \frac{3+\boldsymbol{i}}{1+\boldsymbol{i}}$ ، $z = \frac{(3+\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i})}{1^2 - \boldsymbol{i}^2}$ منه : $z = \frac{3 - 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}^2}{1+1}$ ، $z = \frac{4-2\boldsymbol{i}}{2}$ ، $z = 2 - \boldsymbol{i}$ منه : $S = \{2 - \boldsymbol{i}\}$

لدينا : $\frac{3\bar{z}}{\bar{z}+1} = \boldsymbol{i}$ ، $3\bar{z} = \boldsymbol{i}(\bar{z}+1)$ ، $3\bar{z} = \boldsymbol{i}\,\bar{z} + \boldsymbol{i}$ ، $3\bar{z} - \boldsymbol{i}\,\bar{z} = \boldsymbol{i}$ ، $(3-\boldsymbol{i})\bar{z} = \boldsymbol{i}$ منه : $\bar{z} = \frac{\boldsymbol{i}}{3-\boldsymbol{i}}$ ، $\bar{z} = \frac{\boldsymbol{i}(3+\boldsymbol{i})}{9+1}$ منه : $\bar{z} = \frac{-1+3\boldsymbol{i}}{10}$ ، $\bar{z} = \frac{-1}{10} + \frac{3}{10}\boldsymbol{i}$ إذن : $z = \frac{-1}{10} - \frac{3}{10}\boldsymbol{i}$ منه : $S = \left\{\frac{-1}{10} - \frac{3}{10}\boldsymbol{i}\right\}$

بوضع $z = x + \boldsymbol{i}\,y$ نجد :

$$5z + 7\bar{z} + 4\boldsymbol{i} - 3 = 0$$
$$5(x + \boldsymbol{i}\,y) + 7(x - \boldsymbol{i}\,y) + 4\boldsymbol{i} - 3 = 0$$
$$5x + 5\boldsymbol{i}\,y + 7x - 7\boldsymbol{i}\,y + 4\boldsymbol{i} - 3 = 0$$
$$12x - 2\boldsymbol{i}\,y = 3 - 4\boldsymbol{i}$$

منه : $\begin{cases} 12x = 3 \\ -2y = -4 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 2 \end{cases}$ منه : $z = \frac{1}{4} + 2\boldsymbol{i}$ بالتالي : $S = \left\{\frac{1}{4} + 2\boldsymbol{i}\right\}$

في المثالين الأولين اتبعنا نفس الطرق المتبعة في حل معادلة من الدرجة الأولى في IR ، في المثال الثالث وجدنا بنفس الطرق مرافق z و

بعد ذلك حددنا قيمة هذا الأخير (للتذكير مرافق $z = a + \boldsymbol{i}\, b$ هو $\bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$)

أما المثال الأخير فتوجب استعمال طريقة مغايرة لكونه يحتوي على المجهول و مرافقه و تم خلال هذه الطريقة استعمال الخاصية :

$$a + \boldsymbol{i}\, b = a' + \boldsymbol{i}\, b' \quad \Rightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

تمرين 3 : $z_1 = \dfrac{5+4\boldsymbol{i}}{5-4\boldsymbol{i}} + \dfrac{5-4\boldsymbol{i}}{5+4\boldsymbol{i}}$ ، $z_2 = (1+2\boldsymbol{i})^3 - (1-2\boldsymbol{i})^3$

1

لدينا: $z_1 = \dfrac{5+4\boldsymbol{i}}{5-4\boldsymbol{i}} + \dfrac{5-4\boldsymbol{i}}{5+4\boldsymbol{i}}$ منه : $\bar{z}_1 = \overline{\left(\dfrac{5+4\boldsymbol{i}}{5-4\boldsymbol{i}}\right)} + \overline{\left(\dfrac{5-4\boldsymbol{i}}{5+4\boldsymbol{i}}\right)} = \dfrac{5-4\boldsymbol{i}}{5+4\boldsymbol{i}} + \dfrac{5+4\boldsymbol{i}}{5-4\boldsymbol{i}} = z_1$ إذن : $z_1 \in IR$

لدينا: $z_2 = (1+2\boldsymbol{i})^3 - (1-2\boldsymbol{i})^3$ منه : $\bar{z}_2 = \overline{(1+2\boldsymbol{i})^3} - \overline{(1-2\boldsymbol{i})^3} = (1-2\boldsymbol{i})^3 - (1+2\boldsymbol{i})^3 = -z_2$

إذن : $z_2 \in \boldsymbol{i}\, IR$

استعملنا الخاصيتين : $z \in IR \Leftrightarrow \bar{z} = z$ و $z \in \boldsymbol{i}\, IR \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

2

$$z_1 = \frac{5+4\boldsymbol{i}}{5-4\boldsymbol{i}} + \frac{5-4\boldsymbol{i}}{5+4\boldsymbol{i}} = \frac{(5+4\boldsymbol{i})^2}{25+16} + \frac{(5-4\boldsymbol{i})^2}{25+16}$$

$$z_1 = \frac{25+40\boldsymbol{i}-16+25-40\boldsymbol{i}-16}{41} = \frac{18}{41}$$

$$z_2 = (1+2\boldsymbol{i})^3 - (1-2\boldsymbol{i})^3$$

$$z_2 = 1^3 + 3\times1^2\times(2\boldsymbol{i}) + 3\times1\times(2\boldsymbol{i})^2 + (2\boldsymbol{i})^3 - \left(1^3 - 3\times1^2\times(2\boldsymbol{i}) + 3\times1\times(2\boldsymbol{i})^2 - (2\boldsymbol{i})^3\right)$$

$$z_2 = 1+6\boldsymbol{i}-12-8\boldsymbol{i}-[1-6\boldsymbol{i}-12+8\boldsymbol{i}]$$

$$z_2 = 1+6\boldsymbol{i}-12-8\boldsymbol{i}-1+6\boldsymbol{i}+12-8\boldsymbol{i}$$

$$z_2 = -4\boldsymbol{i}$$

تمرين 4 : $j = \dfrac{-1}{2} + \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1

$$j^2 + j + 1 = \left(\frac{-1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{3}{4} + \frac{-1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{4} + \frac{-1}{2} + 1 = 0$$

لنستنتج أن: $j^3 = 1$

طريقة 1	طريقة 2
$j^3 - 1 = (j-1)(j^2+j+1) = (j-1)\times 0 = 0$ منه : $j^3 = 1$	بما أن $j^2 = -j-1$ ، فإن : $j^3 = j\,j^2 = j(-j-1)$ $j^3 = -j^2 - j = -(-j-1) - j = j+1-j = 1$

2

$$j^{11} = j^9 \times j^2 = (j^3)^3 \times (-j-1) = 1\times(-j-1) = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين 5 : $A\left(\dfrac{-1}{2} + \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $B\left(\dfrac{1}{2} + \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $E(1+\boldsymbol{i})$ و $F(3+2\boldsymbol{i})$ و $H(-1+5\boldsymbol{i})$

1

لدينا: $OA = |z_A - z_O| = \left|\dfrac{-1}{2} + \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

و $OB = |z_B - z_O| = \left|\dfrac{1}{2} + \boldsymbol{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$$AB=|z_B-z_A|=\left|\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|=|1|=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1$$

منه: $OA=OB=AB=1$ بالتالي : OAB مثلث متساوي الأضلاع

للتذكير: $MN=|z_N-z_M|$ و $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$

2

$EF=\lvert z_F-z_E\rvert=\lvert 3+2i-(1+i)\rvert$ $EF=\lvert 3+2i-1-i\rvert=\lvert 2+i\rvert$ $EF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$	$HF=\lvert z_F-z_H\rvert$ $HF=\lvert 3+2i-(-1+5i)\rvert$ $HF=\lvert 3+2i+1-5i\rvert=\lvert 4-3i\rvert$ $HF=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$	$EH=\lvert z_H-z_E\rvert$ $EH=\lvert -1+5i-(1+i)\rvert$ $EH=\lvert -1+5i-1-i\rvert$ $EH=\lvert -2+4i\rvert$ $EH=\sqrt{(-2)^2+4^2}$ $EH=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$
$EF^2=5$	$HF^2=25$	$EH^2=20$

منه: $EF^2+EH^2=HF^2$ بالتالي حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية

فالمثلث EFH قائم الزاوية في النقطة E

استعمال بعض التقنيات التي سبق دراستها يكون مفيدا في حل بعض الوضعيات في الهندسة التحليلية العقدية.

3

لنحدد $K(z_K)$ حيث يكون الرباعي $AKEF$ متوازي أضلاع.

لدينا : $AKEF$ متوازي أضلاع يعني : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{FE}$ منه : $aff\left(\overrightarrow{AK}\right)=aff\left(\overrightarrow{FE}\right)$ أي : $z_K-z_A=z_E-z_F$

$z_K=z_E-z_F+z_A$

منه :
$$z_K=1+i-(3+2i)+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1+i-3-2i+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-2+\frac{-1}{2}-i+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-5}{2}+\frac{-2+\sqrt{3}}{2}i$$

يجب كتابة النتيجة على الشكل الجبري : $a+bi$ لذلك نقوم بالتبسيط و ترتيب الحدود ثم التعميل بالعدد i

4

لدينا $G(z_G)$ مركز ثقل المثلث EFH منه : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$

منه : $z_G-z_O=\frac{1}{3}(z_E-z_O)+\frac{1}{3}(z_F-z_O)+\frac{1}{3}(z_H-z_O)$ منه : $z_G=\frac{z_E+z_F+z_H}{3}$ (لأن : $z_O=0$)

بالتالي : $z_G=\frac{1+i+3+2i-1+5i}{3}=\frac{3+8i}{3}=1+\frac{8}{3}i$

تمرين 6 : $u=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $U(u)$ و $A(1)$ ، $B(2+u^2)$ ، $C(1+u)$.

1

$$z_B=2+\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2+\frac{2}{4}+2\times\frac{-\sqrt{2}}{2}\times i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{4}=2-i$$

$$z_C=1+\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2

لنبين أن $OUCA$ متوازي أضلاع

لدينا: $aff\left(\overrightarrow{OU}\right)=z_U-z_O=u-0=u$ و $aff\left(\overrightarrow{AC}\right)=z_C-z_A=1+u-1=u$ ، منه: $aff\left(\overrightarrow{OU}\right)=aff\left(\overrightarrow{AC}\right)$

إذن: $\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{AC}$ ، بالتالي: $OUCA$ متوازي أضلاع

3

لنبين أن A و B و C نقط مستقيمية، لدينا:

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{1-(2-i)}{1-(1+u)}=\frac{1-2+i}{1-1-u}=\frac{-1+i}{-u}=\frac{1-i}{u}=\frac{1-i}{\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1-i}{\frac{-\sqrt{2}}{2}(1-i)}=\frac{1}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\in IR$$

بالتالي: A و B و C نقط مستقيمية.

4	لنحدد $M(z_M)$ نقطة تقاطع $\left(O,\overrightarrow{e_1}\right)$ و المستقيم (AB) بما أن $M\in\left(O,\overrightarrow{e_1}\right)$ فإن: $z_M=a\ /\ a\in IR$ وبما أن : $M\in(AB)$ فإن A و B و M نقط مستقيمية منه: $\dfrac{z_A-z_M}{z_A-z_B}\in IR$ ولدينا: $\dfrac{z_A-z_M}{z_A-z_B}=\dfrac{1-a}{-1+\boldsymbol{i}}=\dfrac{(1-a)(1+\boldsymbol{i})}{(-1+\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})}=\dfrac{1-a+(1-a)\boldsymbol{i}}{-2}=\dfrac{a-1}{2}+\dfrac{a-1}{2}\boldsymbol{i}$ إذن: $\dfrac{a-1}{2}=0$ منه: $a=1$ بالتالي: $M(1)$	
5	لنحدد $N(z_N)$ نقطة تقاطع $\left(O,\overrightarrow{e_2}\right)$ و المستقيم (AB) بما أن $N\in\left(O,\overrightarrow{e_2}\right)$ فإن: $z_N=b\boldsymbol{i}\ \ /b\in IR$ وبما أن : $N\in(AB)$ فإن A و B و N نقط مستقيمية منه: $\dfrac{z_A-z_N}{z_A-z_B}\in IR$ ولدينا: $\dfrac{z_A-z_N}{z_A-z_B}=\dfrac{1-b\boldsymbol{i}}{-1+\boldsymbol{i}}=\dfrac{(1-b\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})}{(-1+\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})}=\dfrac{1+\boldsymbol{i}-b\boldsymbol{i}+b}{-2}=\dfrac{1+b}{-2}+\dfrac{1-b}{-2}\boldsymbol{i}$ إذن: $\dfrac{1-b}{-2}=0$ منه: $b=1$ بالتالي: $N(\boldsymbol{i})$	