01.

نكتب z على شكل $a+bi$ مع a و b من $\mathbb{R}$ حيث : ؛ $z=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$ ؛

- $z=2+6i-(-5+7i)+2+5+6I-7i=7-i$.
- $z=(1-2i)(2-5i)=1\times 2+1\times(-5i)-(2i)\times 2-(2i)\times(-5i)=2-5i-4i-10=-8-9i$.
- $z=2i\overline{(1-2i)}(1-2i)=2i(1+2i)(1-2i)=2i\left(1^2-(2i)^2\right)=2i+2i\times 4=10i$.
- $z=(1+3i)^2(-5+7i)=(1+2\times 3i-9)(-5+7i)=(-8+6i)(-5+7i)=40-56i-30i-42=-2-86i$.
- $3i-\frac{7}{i}=3i-\frac{7\times(-i)}{i\times(-i)}=3i-\frac{-7i}{1}=3i+7i=10i$.
- $z=\frac{8}{2-3i}=\frac{8(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{16+24i}{2^2+3^2}=\frac{16}{13}+\frac{24}{13}i$.
- $z=\frac{1}{2-7i}+\frac{1}{2+7i}=\frac{1\times(2+7i)+1(2-7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{4}{2^2+7^2}=\frac{4}{53}$.
- $z=\frac{8i-1}{2-3i}=\frac{(8i-1)((2+3i))}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{16i-24-2-3i}{2^2+3^2}=\frac{-26+13i}{13}=-2+i$.
- $z=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\left(\frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\right)^2=\left(\frac{2+2i+2i-1}{2^2+1}\right)^2=\left(\frac{1+4i}{5}\right)^2=\frac{1-16+8i}{25}=\frac{-15}{25}+\frac{8}{25}i$.

02.

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم لحق النقطة M هو العدد العقدي $z=x+yi$ مع x و y من $\mathbb{R}$ نربط كل عدد عقدي z (حيث $z\neq -i$ بالعدد العقدي $Z=\frac{z-2-i}{z+i}$.

.01 حدد : $\Re e(Z)$ و $Im(Z)$.

- نحسب :

$$Z=\frac{z-2-i}{z+i}=\frac{x+yi-2-i}{x+yi+i}=\frac{(x-2+(y-1)i)}{(x+(y+1)i)}=\frac{((x-2+(y-1)i))(x-(y+1)i)}{(x+(y+1)i)((x-(y+1)i))}$$

$$=\frac{(x-2)x+(y-1)(y+1)+((x-2)(-y-1)+(y-1)x)i}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\frac{(x-2)(-y-1)+(y-1)x}{x^2+(y+1)^2}i$$

$$=\frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+\frac{2y-x+2}{x^2+(y+1)^2}i$$

تصحيح تمارين : الأعداد العقدية الجزء (1)

خلاصة : $\Re e(Z) = \frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}$ و $\mathrm{Im}(Z) = \frac{(x-2)(-y-1)+(y-1)x}{x^2+(y+1)^2} = \frac{2y-x+2}{x^2+(y+1)^2}$

.02 حدد مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون :

أ- Z عددا حقيقيا يكافئ : $\mathrm{Im}(Z) = \frac{2y-x+2}{x^2+(y+1)^2} = 0$

يكافئ : $2y-x+2=0$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لمستقيم

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون : Z عددا حقيقياهي المستقيم الذي معادلة ديكارتية له هي : $2y-x+2=0$

ب- Z عددا تخيليا صرفا يكافئ $\Re e(Z) = \frac{x^2-2x+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} = 0$

يكافئ $\frac{(x-1)^2+(x-0)^2-2}{x^2+(y+1)^2}$

يكافئ $(x-1)^2+(x-0)^2-2=0$

يكافئ $(x-1)^2+(x-0)^2=2=\sqrt{2}^2$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لدائرة مركزها النقطة Ω التي لحقها $z_\Omega=1$ و شعاعها $r=\sqrt{2}$

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون : Z عددا تخيليا صرفاهي الدائرة التي مركزها النقطة Ω التي لحقها $z_\Omega=1$ و شعاعها $r=\sqrt{2}$

ج- $|Z|=\sqrt{2}$ أي : $Z=\left|\frac{z-2-i}{z+i}\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|z-2-i|}{|z+i|}=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow |x-2+(y-1)i| = \sqrt{2}|x+(y+1)i|$$

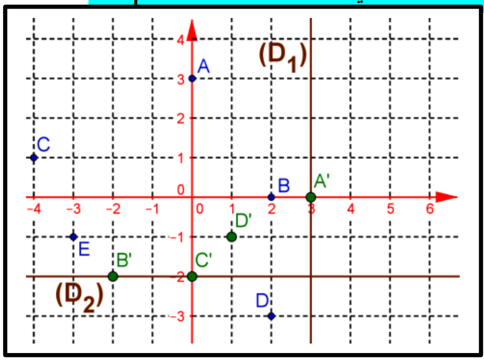
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 = 2\left(x^2+(y+1)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1 = 2x^2+2y^2+4y+2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+4x+4y+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=\sqrt{5}^2$$

خلاصة : مجموعة النقط M من المستوى حيث يكون : $|Z|=\sqrt{2}$ هي الدائرة التي مركزها النقطة I التي لحقها $z_I=-2-2i$ و شعاعها $r=\sqrt{5}$



.03

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

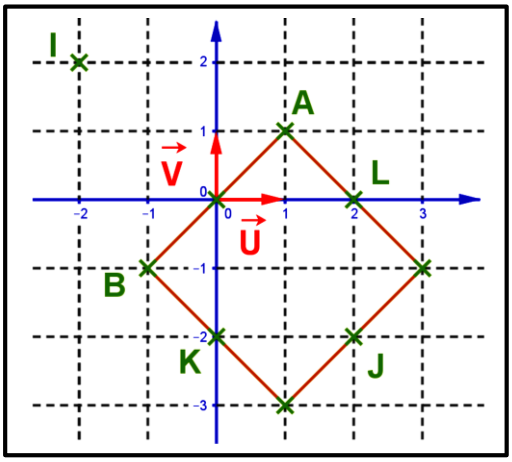
.01 نعطي ألحاق النقط A و B و C و D و E .

هي على التوالي: $z_A=3i$ و $z_B=2$ و $z_C=-4+i$ و $z_D=2-3i$ و $z_E=-3-i$

02. ننشئ النقط A' و B' و C' و D' التي ألحاقها 3 و $2-2i$ و -2 و $-2i$ و $1-i$.

03. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نحدد مبيانيا معيار وعمدة للحق كل نقطة من النقطة التالية :



- بالنسبة ل A: المعيار هو $|z_A|=\sqrt{2}$ العمدة هي $\arg(z_A)\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل B: المعيار هو $|z_B|=\sqrt{2}$ العمدة هي $\arg(z_B)\equiv\frac{-3\pi}{4}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل I: المعيار هو $|z_I|=2\sqrt{2}$ العمدة هي $\arg(z_I)\equiv\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل J: المعيار هو $|z_J|=2\sqrt{2}$ العمدة هي $\arg(z_J)\equiv\frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل K: المعيار هو $|z_K|=2$ العمدة هي $\arg(z_K)\equiv\frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$.
- بالنسبة ل L: المعيار هو $|z_A|=2$ العمدة هي $\arg(z_L)\equiv 0\ [2\pi]$.

.04

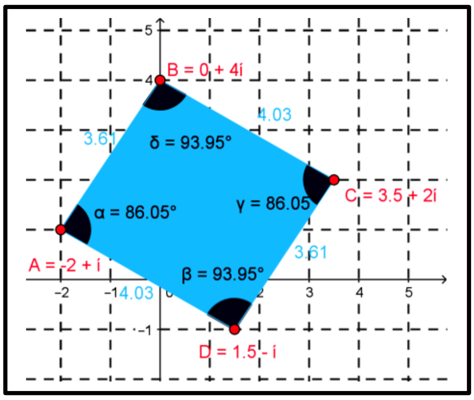
في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط حيث :

01. $A_{(z_A=1+i\sqrt{3})}$ و $B_{(z_B=-1-i)}$ و $C_{(z_C=3-i)}$. حدد طبيعة المثلث ABC .

- لدينا : $AB=|z_B-z_A|=|-1-i-(1+i\sqrt{3})|=|-2-(1+\sqrt{3})i|=\sqrt{4+(1+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+2\sqrt{3}}$.
- لدينا : $AC=|z_C-z_A|=|3-i-(1+i\sqrt{3})|=|2-(1+\sqrt{3})i|=\sqrt{4+(1+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+2\sqrt{3}}$.
- لدينا : $BC=|z_C-z_B|=|3-i+1+i|=|4|=4$.

و منه : $AB=AC$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين في A .

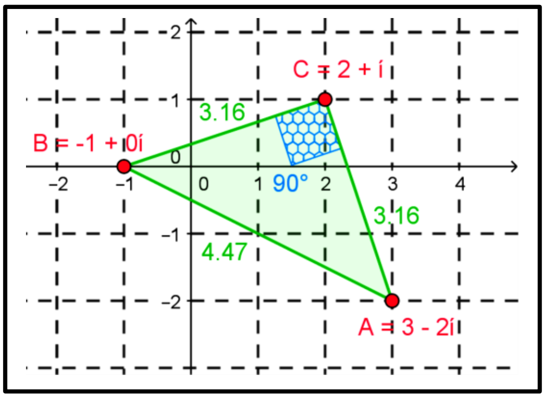


02. ننشئ النقط $A_{(z_A=-2+i)}$ و $B_{(z_B=4i)}$ و $C_{\left(z_C=\frac{7}{2}+2i\right)}$ و $D_{\left(z_C=\frac{3}{2}-i\right)}$

ثم نحدد طبيعة الرباعي $ABCD$.

- لدينا : $AB=|z_B-z_A|=|4i-(-2+i)|=|-2+3i|=\sqrt{4+3^2}=\sqrt{13}$.
- لدينا : $DC=|z_C-z_D|=\left|\frac{7}{2}+2i-\left(\frac{3}{2}-i\right)\right|=\left|\frac{7}{2}-\frac{3}{2}+(2+1)i\right|=\sqrt{(2)^2+3^2}=\sqrt{13}$.
- لدينا : $BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{7}{2}+2i-4i\right|=\left|\frac{7}{2}-2i\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{53}{4}}=\frac{\sqrt{53}}{2}$.
- لدينا : $AD=|z_D-z_A|=\left|\frac{3}{2}-i-(-2+i)\right|=\left|\frac{7}{2}-2i\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{53}}{2}$.

و منه : $AB=DC$ و $BC=AD$



خلاصة : الرباعي ABCD متوازي الأضلاع .

.03 النقطة A و B و C ألحقها $3-2i$; -1 ; $2+i$ على التوالي .

أ- ننشئ النقط : A و B و C في المستوى العقدي.

ب- نبين أن المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

- لدينا : $AB=|z_B-z_A|=|-1-(3-2i)|=|-4+2i|=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$.
- لدينا : $AC=|z_C-z_A|=|2+i-(3-2i)|=|-1+3i|=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$.
- لدينا : $BC=|z_C-z_B|=|2+i+1|=|3+i|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$.

و منه : $CA=CB$ و $AB^2=CA^2+CB^2$

خلاصة : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية .

.05

أحسب معيار الأعداد: 3 ; -2 ; $5i$; $-3i$; $2-i$; $\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$; $1-i\sqrt3$ ؛ $1+i$ ؛ $1-i$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$ ؛ $\left(1+i\sqrt3\right)\left(\sqrt3-i\right)$

لدينا :

- $|3|=3$ و $|-2|=2$ و $|5i|=5$ و $|-3i|=3$ و $|2-i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt5$ و $\left|\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=1$
- $\left|1-i\sqrt3\right|=\sqrt{1^2+\sqrt3^2}=2$ و $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt2$ و $|1-i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt2$ و
- $\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3\right|=\left|\frac{1+i}{1-i}\right|^3=\left(\frac{|1+i|}{|1-i|}\right)^3=\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt2}\right)^3=1$ و $\left|\left(1+i\sqrt3\right)\left(\sqrt3-i\right)\right|=\left|1+i\sqrt3\right|\left|\sqrt3-i\right|=2\times2=4$

.06

نحدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية:

.01

- $z_1=1+i=|z_1|\left(\frac{1}{|z_1|}+i\frac{1}{|z_1|}\right)=\sqrt2\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt2;\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_2=1+i\sqrt3=|z_2|\left(\frac{1}{|z_2|}+i\frac{\sqrt3}{|z_2|}\right)=2\left(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2;\frac{\pi}{3}\right]$.
- $z_3=1-i\sqrt3=\overline{z_2}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]$.
- $z_4=1-i=\overline{z_1}=\sqrt2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt2;-\frac{\pi}{4}\right]$
- $z_5=7+7i=7(1+i)=[7;0]\left[\sqrt2;\frac{\pi}{4}\right]=\left[7\sqrt2;0+\frac{\pi}{4}\right]=\left[7\sqrt2;\frac{\pi}{4}\right]$.

- $z_6=-8-8\sqrt{3}i=-8\left(1+i\sqrt{3}\right)=-8z_2=[8;\pi]\left[2;\frac{\pi}{3}\right]=\left[16;\pi+\frac{\pi}{3}\right]=\left[16;\frac{4\pi}{3}\right]=\left[16;-\frac{2\pi}{3}\right]$
- $z_7=3-3i=3(1-i)=3z_4=[3;0]\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2};0-\frac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

.02

- نحسب : $z_8=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}=\frac{[4,0]}{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]}=\left[\frac{4}{2},0-\frac{\pi}{3}\right]=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$
- نحسب : $z_9=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]$.
- ثم سنتنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

من خلال

$$z_9=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{\left[2,\frac{\pi}{3}\right]}{\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{2}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right]=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{12}\right]\Leftrightarrow z_9=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow z_9=\frac{1+\sqrt{3}+\left(-1+\sqrt{3}\right)i}{2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow z_9=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)i}{2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

و منه : $\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

و بالتالي : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ خلاصة : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

.07

.01 حدد المعيار و عمدة الأعداد العقدية التالية "

أ - $z_1=\sqrt{6}-i\sqrt{2}=a+bi$ لدينا : $|z_1|=\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{6+2}=2\sqrt{2}$ و $\arg z_1\equiv\alpha\ [2\pi]$ مع

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{|z_1|}=\frac{\sqrt{6}}{|z_1|}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{b}{|z_1|}=\frac{-\sqrt{2}}{|z_1|}=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

و منه : $\alpha\equiv-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ و بالتالي $\arg z_1\equiv\alpha\equiv-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

خلاصة : معيار $|z_1|=2\sqrt{2}$ و عمدة $\arg z_1\equiv-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

ب – $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=a+bi$: لدينا $|z_2|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg z_2\equiv\alpha\ [2\pi]$ مع

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{a}{|z_2|}=\frac{-1}{2|z_2|}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{b}{|z_2|}=\frac{-1}{2|z_2|}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$ و منه : $\alpha\equiv-\frac{3\pi}{4}\equiv\frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$ و بالتالي $\arg z_2\equiv\alpha\equiv-\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$

خلاصة : معيار $|z_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و عمدة $\arg z_2\equiv-\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

ج – بالنسبة ل $z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ نستعمل طريقة أخرى :

نلاحظ أن :

$$z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left[1;\frac{2\pi}{3}\right]$$

خلاصة : معيار $|z_3|=1$ و عمدة $\arg z_3\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

د – بالنسبة ل : z_1z_2

- بالنسبة للمعيار : $|z_1z_2|=|z_1|\times|z_2|=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$
- بالنسبة للعمدة : $\arg(z_1z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)\equiv-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\equiv-\frac{11\pi}{12}\ [2\pi]$

بالنسبة ل : $\frac{z_1}{z_2}$

- بالنسبة للمعيار : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$
- بالنسبة للعمدة : $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)\equiv-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\equiv\frac{7\pi}{12}\ [2\pi]$

بالنسبة ل : ${z_2}^2$

- بالنسبة للمعيار : $|{z_2}^2|=|z_2|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$
- بالنسبة للعمدة : $\arg({z_2}^2)\equiv2\times\arg(z_2)\equiv2\times-\frac{3\pi}{4}\equiv\frac{-3\pi}{2}\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

02. نحدد الشكل المثلثي و الشكل الأسي ثم المعيار و عمدة لكل عدد عقدي من بين الأعداد العقدية التالية "

- $z_1=3-3i=3(1-i)=[3;0]\times\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]=\left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]=3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و منه: $|z_1|=3\sqrt{2}$ و $\arg(z_1)\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- $z_2 = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = [2;0]\times\left[1;-\frac{\pi}{3}\right] = \left[2;-\frac{\pi}{3}\right] = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ و منه : $|z_1| = 3\sqrt{2}$ و $\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

- $z_1z_2 = \left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]\left[2;-\frac{\pi}{3}\right] = \left[3\sqrt{2}\times 2;-\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[6\sqrt{2};-\frac{7\pi}{12}\right]$ و منه : $|z_1| = 3\sqrt{2}$ و

$$= 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\times 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 6\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)i} = 6\sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{12}i}$$

$\arg(z_2) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2};-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right] = \left[4;\frac{\pi}{12}\right] = 4e^{\frac{\pi}{12}i}$ و منه : $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 4$ و $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

$$z_2^3 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{3\pi}{4}\right]^3 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3;3\times\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{9\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4};-2\pi-\frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

و منه : $\left|z_2^3\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\arg\left(z_2^3\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- $z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \left[2;\frac{-\pi}{12}\right] = 2e^{-\frac{\pi}{12}i}$.

- $z_4 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \left[2;\frac{\pi}{12}\right]$.

- $z_5 = -2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-\pi i}\times e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\pi\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \left[2;\frac{\pi}{4}\right]$

- $z_6 = \frac{2i}{1-i} = \frac{\left[2;\frac{\pi}{2}\right]}{\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}};\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

03. نعطي إخطاط ل أ- $\cos^3 x$. ب- $\sin^4 x$.

أ- إخطاط ل $\cos^3 x$

حسب صيغتي أولير **formules d'Euler** $\cos x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ و $\sin x = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ مع $z = [1;x] = \cos x + i\sin x$

أو أيضا : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ و $\cos x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$ مع $\cos x + i\sin x = e^{ix}$

طريقة 1 : نستعمل الكتابة $\cos x = \frac{z+\overline{z}}{2}$

لا تنسى :

- $z^n = [1;nx] = \cos nx + i\sin nx$ صيغة موفر **formule de Moivre**

- $z^n+\overline{z}^n=2\cos(nx)$ و $z^n-\overline{z}^n=2i\sin(nx)$ و $z^n\times\overline{z}^n=1$

ومنه :

$$\cos^3 x=\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3(z+\overline{z})^3=\frac{1}{8}\left(z^3+3z^2\overline{z}+3z\overline{z}^2+\overline{z}^3\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(z^3+\overline{z}^3+3z\overline{z}\left(z+\overline{z}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos(3x)+3\times1\times2\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos3x+6\cos x\right)$$

خلاصة : $\boxed{\cos^3 x=\frac{1}{8}\left(2\cos3x+6\cos x\right)}$

طريقة 2 : نستعمل الكتابة $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

لا تنسى :

- $e^{ix}\times e^{iy}=e^{i(x+y)}$ و $\dfrac{e^{ix}}{e^{iy}}=e^{i(x-y)}$ و $\dfrac{1}{e^{ix}}=e^{-ix}$ و $\left(e^{ix}\right)^n=e^{inx}$.
- $\left(e^{ix}\right)^n+\left(e^{-ix}\right)^n=2\cos(nx)$ و $\left(e^{ix}\right)^n-\left(e^{-ix}\right)^n=2i\sin(nx)$ و $e^{inx}\times e^{-inx}=1$

ومنه :

$$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\left(e^{ix}\right)^3+3\left(e^{ix}\right)^2\times e^{-ix}+3e^{ix}\times\left(e^{-ix}\right)^2+\left(e^{-ix}\right)^3\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{i3x}+3e^{i2x}\times e^{-ix}+3e^{ix}\times e^{-i2x}+e^{-i3x}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{i3x}+e^{-i3x}+3e^{ix}\times e^{-ix}\times\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos(3x)+3\times1\times2\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos3x+6\cos x\right)$$

خلاصة : $\boxed{\cos^3 x=\frac{1}{8}\left(2\cos3x+6\cos x\right)}$

ب - إخطاط ل $\sin^4 x$

طريقة 1 : نستعمل الكتابة $\sin x=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

لا تنسى :

- $z^n=[1;nx]=\cos nx+i\sin nx$ صيغة موفر formule de Moivre
- $z^n+\overline{z}^n=2\cos(nx)$ و $z^n-\overline{z}^n=2i\sin(nx)$ و $z^n\times\overline{z}^n=1$

ومنه :

$$\sin^4 x = \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^4 = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 (z-\overline{z})^3 = \frac{1}{16}\left(z^4 - 4z^3\overline{z} + 6z^2\overline{z}^2 - 4z\overline{z}^3 + \overline{z}^4\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(z^4 + \overline{z}^4 - 4z\overline{z}\left(z^2+\overline{z}^2\right) + 6z^2\overline{z}^2\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 4\times1\times2\cos 2x + 6\times1\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)$$

خلاصة : $\boxed{\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)}$

طريقة 2 : نستعمل الكتابة $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

لا تنسى :

- $e^{ix}\times e^{iy} = e^{i(x+y)}$ و $\dfrac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$ و $\dfrac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$ و $\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$.
- $\left(e^{ix}\right)^n + \left(e^{-ix}\right)^n = 2\cos(nx)$ و $\left(e^{ix}\right)^n - \left(e^{-ix}\right)^n = 2i\sin(nx)$ و $e^{inx}\times e^{-inx} = 1$ ومنه :

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4 - 4\left(e^{ix}\right)^3\times e^{-ix} + 6\left(e^{ix}\right)^2\times\left(e^{-ix}\right)^2 - 4e^{ix}\times\left(e^{-ix}\right)^3 + \left(e^{-ix}\right)^4\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} - 4e^{i3x}\times e^{-ix} + 6e^{i2x}\times e^{-i2x} - 4e^{ix}\times e^{-i3x} + e^{-i4x}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{i4x} + e^{-i4x} - 4e^{ix}\times e^{-ix}\times\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right) + 6\times1\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x) - 4\times1\times2\cos 2x + 6\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)$$

خلاصة : $\boxed{\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)}$

08.

01. نحدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية التالية: $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1-i$; $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

- لدينا : $z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{6}\right]$

$$z_2=1-i=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{6}\right]}{\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}=\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};-\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[1;\frac{\pi}{12}\right]$$

خلاصة: $Z=\left[1;\frac{\pi}{12}\right]$

02.

أ- نعطي الشكل الجبري ل: Z .

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-i\right)}{1-i}=\sqrt{2}\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\sqrt{3}+1+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$$

خلاصة : الشكل الجبري ل: Z هو : $Z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$

ب- استنتج قيمة كل من : $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

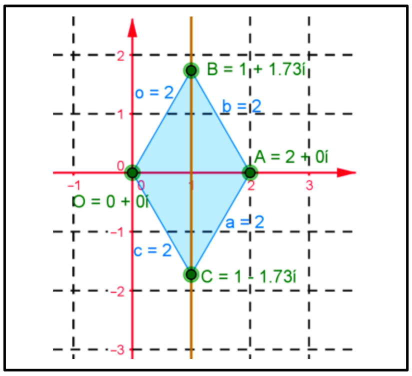
من خلال $Z=\left[1;\frac{\pi}{12}\right]=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $Z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}i$

إذن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

خلاصة : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

.09

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ (الوحدة 2 cm) نعتبر النقط $A_{(z_A=2)}$ و $B_{\left(z_B=1+i\sqrt{3}\right)}$ و $C_{\left(z_C=1-i\sqrt{3}\right)}$



01. أ- نعطي الشكل المثلثي و الشكل الأسي ل z_B ثم ل z_C .

- $z_B=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2;\frac{\pi}{3}\right]=2e^{i\frac{\pi}{3}}$
- $z_C=1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب- ننشئ النقط A و B و C .

ج- نستنتج مبيانيا طبيعة الرباعي OBAC : لدينا OBAC معين .

02. نحدد ثم أنشئ (Δ) المجموعة النقط M_Z من المستوى العقدي حيث : $|z|=|z-2|$.

لدينا : $|z| = |z-2| \Leftrightarrow OM = AM$
$\Leftrightarrow MO = MA$

و منه : مجموعة النقط M هي واسط القطعة $[OA]$.

03.. x و y من $\mathbb{R}$ لكل النقطة M لحقها العدد العقدي $z = x + yi$ (مع $z \neq z_A$) نربط ها بالنقطة M' التي لحقها z' حيث $z' = f(z) = \frac{-4}{z-2}$.

أ - نحل المعادلة : $f(z) = z$.

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{-4}{z-2} = z$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 2z + 1 + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow z - 1 = i\sqrt{3} \text{ أو } z - 1 = -i\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \text{ أو } z = 1 - i\sqrt{3}$$

خلاصة : حلي المعادلة هما : $z = 1 - i\sqrt{3}$ أو $z = 1 + i\sqrt{3}$.

ب - نستنتج النقطتين التي تربط B و C .
النقطة B نربطها بنفسها إي صامدة نفس الشيء ل C .

ج- لتكن G مركز ثقل المثلث OAB نربطها ب G' حدد ثم أنشئ النقطة G' .

لدينا : لحق G يحقق ما يلي : $Z_G = \frac{1}{3}(Z_O + Z_A + Z_B) = \frac{2 + 1 - i\sqrt{3}}{3} = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$

و منه : لحق G' يحقق ما يلي $Z_{G'} = \frac{-4}{1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} - 2} = \frac{-12}{-3 + i\sqrt{3}} = \frac{-12\left(-3 - i\sqrt{3}\right)}{9 + 3} = 3 + i\sqrt{3}$

04...

أ - نبين أن : $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$. لدينا :

$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|} \Leftrightarrow \left|\frac{-4}{z-2} - 2\right| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$
$$\Leftrightarrow \left|\frac{-4 - 2z + 4}{z-2}\right| = \frac{2|z|}{|z-2|} \Leftrightarrow \left|\frac{-2z}{z-2}\right| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

خلاصة : $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$

ب- نفترض أن : النقطة M تنتمي ل (Δ) نربطها بالنقطة M' . بين أن M' تنتمي لدائرة يتم تحديد مركزها و شعاعها .

لدينا : $|z| = |z-2|$ و $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$ و منه : $|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z|} = 2$ و منه M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة A التي لحقها 2 و شعاعها $R = 2$. خلاصة : $M' \in \mathscr{C}(A;2)$