

1- المجموعة \mathbb{C}
أ/ مبرهنة

توجد مجموعة \mathbb{C} تتضمن \mathbb{R} وتحقق:

$$(i) \text{ يحتوي } \mathbb{C} \text{ على عنصر غير حقيقي } i \text{ و يحقق } i^2 = -1$$

$$(ii) \text{ كل عنصر من } \mathbb{C} \text{ يكتب بكيفية وحيدة على الشكل: } a+ib \text{ بحيث } (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

(iii) المجموعة \mathbb{C} مزودة بعمليتي الجمع والضرب تمددان نفس العمليتين في \mathbb{R} ولهما نفس الخاصيات

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \quad *$$

ملاحظة:

ب/ تساوي عددين عقديين

$$b = b' \text{ و } a = a' \Leftrightarrow a+ib = a'+ib' \quad \text{ليكن } (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } (a';b') \in \mathbb{R}^2 \quad \text{خاصية}$$

برهان

$$* \text{ } a = a' \text{ و } b = b' \Leftrightarrow a+ib = a'+ib' \text{ استلزام صحيح}$$

$$* \text{ نعتبر } a+ib = a'+ib' \text{ و منه } i(b-b') = a'-a$$

$$\text{نفترض أن } b \neq b' \text{ و منه } i = \frac{a'-a}{b-b'}$$

$$\text{و حيث أن } (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } (a';b') \in \mathbb{R}^2 \text{ فإن } \frac{a'-a}{b-b'} \in \mathbb{R}$$

و بالتالي $i \in \mathbb{R}$ وهذا غير صحيح لان عدد غير حقيقي
إذن افتراضنا خاطئ و منه $b = b'$ و بالتالي $a'-a = 0$ إذن $a' = a$

ج/ اصطلاحات و تعاريف

$$* \text{ ليكن عدد عقدي } z = a+ib \text{ حيث } (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $Re(z) = a$.

العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $Im(z) = b$

الكتابة $z = a+ib$ حيث $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z

- نقول إن عددا عقديا عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان جزئه الحقيقي منعدما و جزئه تخيلي غير منعدم
- نقول إن عددا عقديا عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان جزئه التخيلي منعدما

أمثلة

حدد الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد العقدي z في الحالات التالية

$$z = \sqrt{2}-3i \quad \text{أ} \quad z = 5i-3 \quad \text{ب} \quad z = 2\sqrt{3}i \quad \text{ج} \quad z = 17 \quad \text{د}$$

د/ العمليات

$$\text{ليكن عددين عقديين } z = a+ib \text{ و } z' = a'+ib' \text{ حيث } (a;b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } (a';b') \in \mathbb{R}^2$$

$$* \text{ الجمع } z+z' = (a+a')+(b+b')i$$

$$* \text{ الضرب } z \cdot z' = (aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

$$(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \quad (a-ib)^2 = (a^2-b^2)-2abi \quad (a+ib)^2 = (a^2-b^2)+2abi *$$

$$* \text{ مقلوب عدد عقدي غير منعدم } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$$* \text{ خارج عددين عقديين } \frac{z}{z'} = \frac{a-bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} \text{ حيث } z' \neq 0$$

* خاصيات العدد العقدي i

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{Z}$$

$$i^n = i \text{ إذا كان } n = 4k+1 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$i^n = 1 \text{ إذا كان } n = 4k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$i^n = -i \text{ إذا كان } n = 4k+3 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$i^n = -1 \text{ إذا كان } n = 4k+2 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$1- \text{ نحدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية } \frac{2i}{3-i} + \frac{(1-2i)^2}{i} ; \frac{3-2i}{2+i} ; \frac{1}{2-3i}$$

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

$$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{(3-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-2-3i-4i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

$$\frac{2i}{3-i} + \frac{(1-2i)^2}{i} = \frac{2i(3+i)}{10} - i(1-4-4i) = \frac{3}{5}i - \frac{1}{5} + 3i - 4 = -\frac{21}{5} + \frac{18}{5}i$$

2- نحسب $(1+i)^2$ ونستنتج $(1+i)^{230}$

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1+i)^{230} = (2i)^{115} = 2^{115}i^{4 \times 28 + 3} = -2^{115}i$$

3- نحل المعادلة $2iz - 3i + 2 = z + i$ $z \in \mathbb{C}$

$$2iz - 3i + 2 = z + i \Leftrightarrow (1+2i)z = -2+4i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2+4i}{1+2i} = \frac{-2(1-2i)(1-2i)}{5} = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$$

$$S = \left\{ \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i \right\} \text{ إذن}$$

2- التمثيل الهندسي لعدد عقدي- لحق متجهة

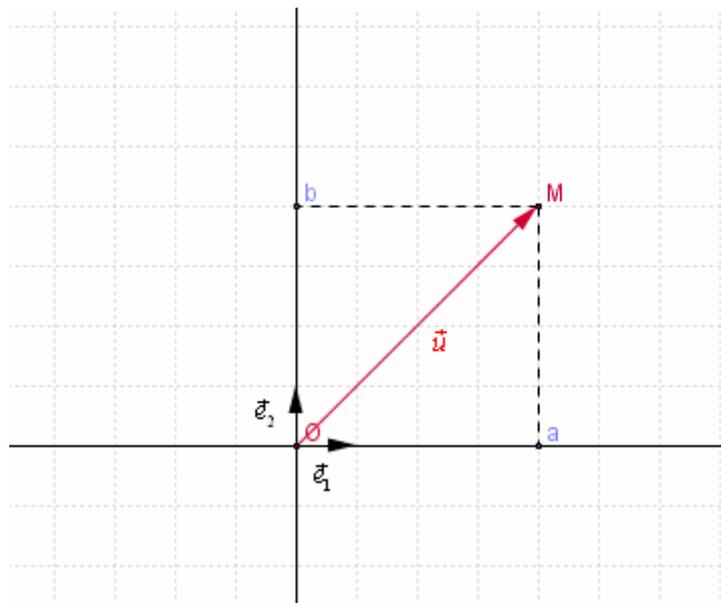
المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(a; b)$ من المستوى (P) هي صورة عدد عقدي وحيد $z = a + ib$. نكتب $M(z)$

و $z = a + ib$ يسمى لحق $M(a; b)$. نكتب $z = aff(M)$

كل متجهة $\vec{u}(a; b)$ من المستوى هي صورة عدد عقدي وحيد $z = a + ib$. نكتب $\vec{u}(z)$

العدد العقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}(a; b)$ نكتب $z = aff(\vec{u})$



ملاحظة و مصطلحات

* الأعداد الحقيقية هي ألحاق نقط محور الافاصيل الذي يسمى المحور الحقيقي
* الأعداد التخيلية الصرفة هي ألحاق نقط محور الأرتاب الذي يسمى المحور التخيلي

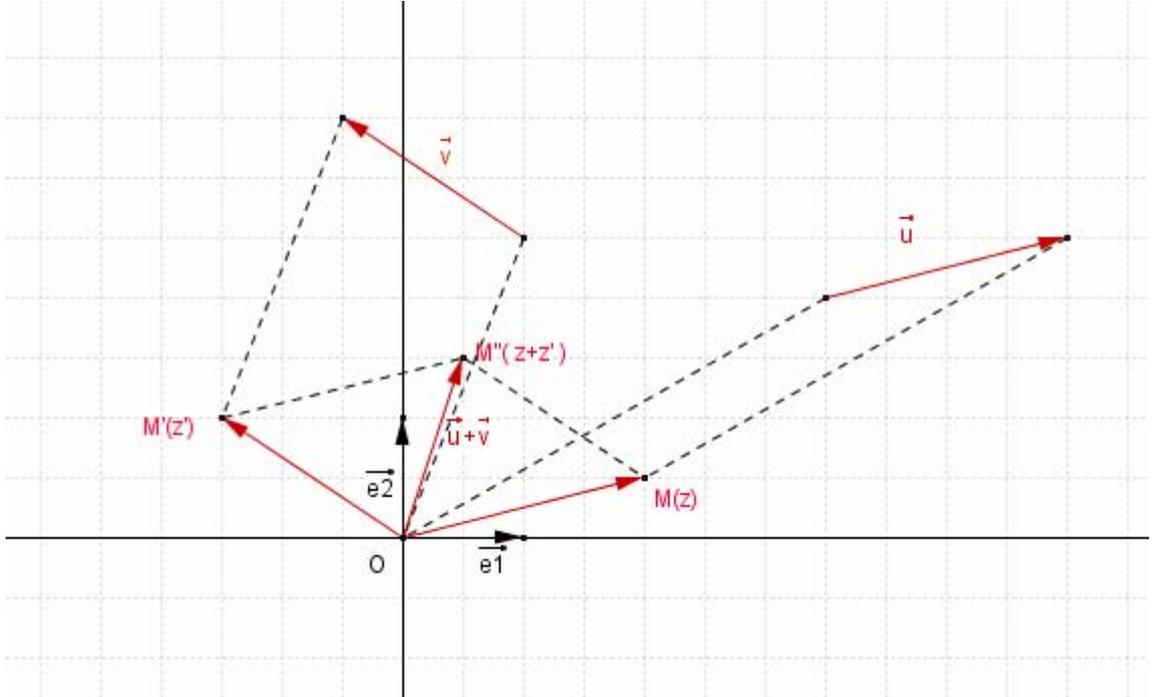
***- لِحَق \overline{AB}**

ليكن A و B لِحَقِيهَما $z_A = a + ib$ و $z_B = a' + ib'$ عَلى التَّوَالِي
 ومِنه $A(a; b)$ و $B(a'; b')$ و بالتَّالِي $\overline{AB}(a' - a; b' - b)$ أَي
 $aff(\overline{AB}) = (a' - a) + i(b' - b) = (a' + ib') - (a + ib) = z_B - z_A$

لِحَق \overline{AB} هُو $z_B - z_A$ حَيْث $A(z_A)$ و $B(z_B)$

***- لِحَق $\vec{u} + \vec{v}$ و $\alpha\vec{u}$**

نَعْلَم أَن إِذَا كَانَ $\vec{u}(a; b)$ و $\vec{v}(a'; b')$ فَان $\vec{u} + \vec{v}(a + a'; b + b')$ وَمِنه $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$



$$aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$$

لِتَكُن \vec{u} و \vec{v} مَتَجَهَّتَيْنِ مِنَ الْمَسْتَوَى و لِكُلِّ عِدَدٍ حَقِيقِي α

$$aff(\alpha\vec{u}) = \alpha aff(\vec{u})$$

تَمَرِين

فِي الْمَسْتَوَى الْعَقْدِي أَنْشَأِ النِّقْطَ A و B و C أَلْحَاقَهَا عَلى التَّوَالِي $z_A = 2$
 و $z_B = -1 + 4i$ و $z_C = -3i$ و الْمَتَجَهَّةَ \vec{u} الَّتِي لِحَقَهَا $-1 + 3i$

***- اسْتِقَامِيَّةُ النِّقْطِ**

النِّقْطُ الْمَخْتَلِفَةُ $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مَسْتَقِيمِيَّةٌ $\Leftrightarrow \overline{AB} = \lambda \overline{AC}$ / $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / aff(\overline{AB}) = aff(\lambda \overline{AC})$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / z_B - z_A = \lambda(z_C - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

تَكُونُ النِّقْطُ الْمَخْتَلِفَةُ $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مَسْتَقِيمِيَّةٌ إِذَا وَفَقَطُ إِذَا كَانَ $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$

***- الْمَرَجِح**

لِتَكُن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $G(z_G)$ نِقْطٌ مِنَ الْمَسْتَوَى الْعَقْدِي و α و β عِدَدَيْنِ حَقِيقِيَيْنِ حَيْث $\alpha + \beta \neq 0$

G مَرَجِح $(A; \alpha)$ و $(B; \beta)$ إِذَا وَفَقَطُ إِذَا كَانَ $(\alpha + \beta)z_G = \alpha z_A + \beta z_B$

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $I(z_I)$ نقط من المستوى العقدي

$$I \text{ منتصف } [A;B] \text{ إذا وفقط إذا كان } z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

تمرين

بين أن النقط $A(1+i)$ و $B(1+3i)$ و $C\left(\frac{-1}{2}-2i\right)$ مستقيمة

الجواب

$$\frac{\left(\frac{-1}{2}-2i\right)-(1+i)}{(2+3i)-(1+i)} = \frac{-3-6i}{1+2i} = \frac{(-3-6i)(1-2i)}{2(1+2i)(1-2i)} = \frac{-3+6i-6i-12}{10} = -\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$$

إذن A و B و C مستقيمة

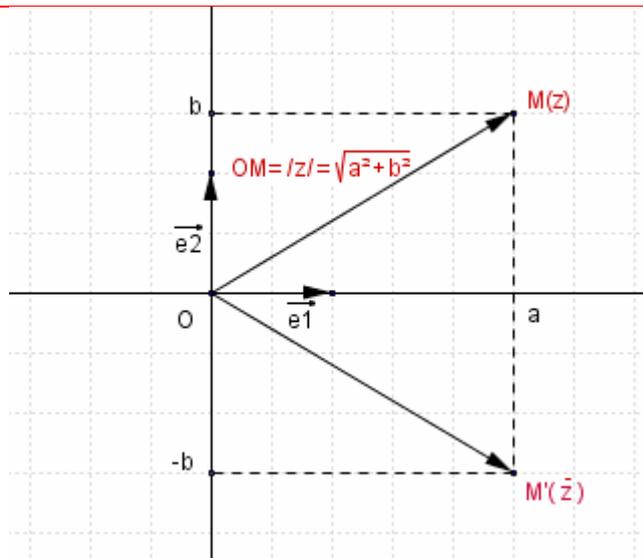
3- المرافق و المعيار

أ/ تعريف

ليكن عدد عقدي $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

* العدد العقدي $z = a - ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ ونرمز له بـ $\bar{z} = a - ib$.

* العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z = a + ib$. نرمز له بـ $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.



ملاحظة

* النقطتان $M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلتان بالنسبة لمحور الافاصل

* إذا كان $z = a + ib$ فإن $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

ب/ خاصيات

ليكن عددين عقديين $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و $(a'; b') \in \mathbb{R}^2$

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + (b + b')i} = a + a' - (b + b')i = a - ib + a' - ib' = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$\overline{z \cdot z'} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + a'b)i} = aa' - bb' - ab'i - a'bi = a(a' - b'i) - bi(a' - b'i) = (a - bi)(a' - b'i) = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a + bi}\right)} = \overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ ومنه}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

خاصيات

لتكن $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}^*$

$$\overline{\overline{z}} = z \quad *$$

$$z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \quad ; \quad z - \overline{z} = 2\operatorname{Im}(z)i \quad *$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z \quad *$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z \quad *$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}, \quad z' \neq 0 \quad \overline{\alpha z} = \alpha \overline{z} \quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} \quad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad *$$

خاصيات

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ نقطتين من المستوى العقدي منسوب إلى المعلم $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

$$OA = |z_A| \quad \|\overline{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$$

لتكن $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}^*$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad *$$

$$|z| = |-z| = |\overline{z}| \quad *$$

$$z' \neq 0 \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |z^n| = |z|^n \quad |z \cdot z'| = |z| |z'| \quad *$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad *$$

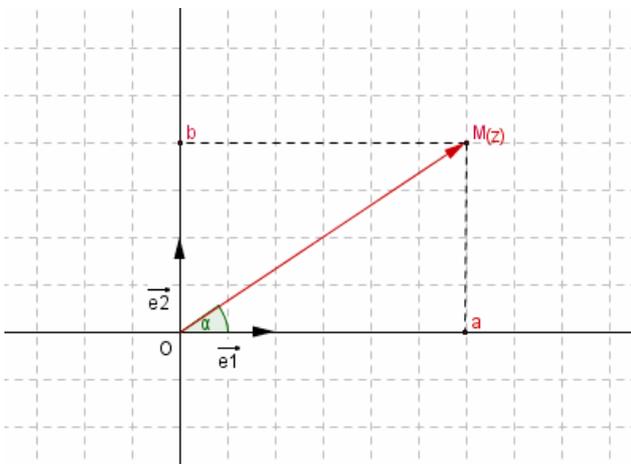
تعريف

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين

$$|z-2| = |z+2i| \quad -2$$

$$|z-1+i| = |2-i\sqrt{5}| \quad -1$$

-4 الشكل المثلثي لعدد عقدي و العمدة / العمدة لعدد عقدي



المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

ليكن $z = a + ib$ حيث $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و

النقطة M صورته, وليكن α قياسا للزاوية $(\vec{e}_1, \overline{OM})$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z

نكتب $[2\pi] \arg z \equiv \alpha$.

ملاحظة

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \arg a \equiv 0 \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \arg a \equiv 0 \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall b \in i\mathbb{R}^+ \quad \arg b \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall b \in i\mathbb{R}^+ \quad \arg b \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad *$$

ب/ الكتابة المثلثية لعدد عقدي

-* ليكن $z = a + ib \in \mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً و α

عددا حقيقيا نضع $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

ومنه $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ حيث $\cos \alpha = \frac{a}{r}$; $\sin \alpha = \frac{b}{r}$

إذن $[2\pi] \arg z \equiv \alpha$

الكتابة $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z = [r, \alpha]$

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$15 = [15; 0] \quad -2i = \left[2; -\frac{\pi}{2} \right]$$

$$-\sqrt{3}-i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \left[2; \frac{5\pi}{6} \right]$$

ج / خاصيات

ليكن $z = [r, \alpha]$ و $z' = [r', \alpha']$ عددين عقديين غير منعدمين

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha' + i \sin \alpha') = (\cos \alpha \cos \alpha' - \sin \alpha \sin \alpha') + i(\sin \alpha \cos \alpha' + \cos \alpha \sin \alpha')$$

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \alpha' + i \sin \alpha') = \cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')$$

$$z \times z' = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha') = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha')) = [rr'; \alpha + \alpha']$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{r} (\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = \left[\frac{1}{r}; -\alpha \right]$$

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = [r; \alpha] \times \left[\frac{1}{r'}; -\alpha' \right] = \left[\frac{r}{r'}; \alpha - \alpha' \right]$$

$$\bar{z} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = [r, -\alpha]$$

$$-z = r(-\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(\alpha + \pi) + i \sin(\alpha + \pi)) = [r, \alpha + \pi]$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z} \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad \text{نبين أن}$$

ليكن $z = [r; \alpha]$ عدد عقدي غير منعدم

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N} \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad \text{لنبين أولا}$$

من أجل $n = 0$ لدينا $z^0 = 1$ و $1 = [1; 0] = [1; 0 \times \alpha]$ اذن العبارة صحيحة من أجل $n = 0$

لنفترض أن $z^n = [r^n; n\alpha]$ و نبين أن $z^{n+1} = [r^{n+1}; (n+1)\alpha]$

$$z^{n+1} = z \times z^n = [r; \alpha] \times [r^n; n\alpha] = [r \times r^n; \alpha + n\alpha] = [r^{n+1}; (n+1)\alpha]$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N} \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad \text{إذن}$$

ليكن $n \in \mathbb{Z}^-$ و منه $-n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{[r^{-n}; -n\alpha]} = \left[\frac{1}{r^{-n}}; -(-n\alpha) \right] = [r^n; n\alpha]$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z} \quad z^n = [r^n; n\alpha] \quad \text{إذن}$$

خاصيات

ليكن $z = [r, \alpha]$ و $z' = [r', \alpha']$ عددين عقديين غير منعدمين

$$z = z' \Leftrightarrow r = r' \quad \text{et} \quad \alpha = \alpha' \quad *$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \quad [2\pi] \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z \quad [2\pi] \quad \text{و} \quad \arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \quad [2\pi] \quad *$$

$$\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right] \quad \text{و} \quad \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\alpha \right] \quad \text{و} \quad zz' = [rr', \alpha + \alpha']$$

$$-z = [r, \alpha + \pi] \quad \text{و} \quad \bar{z} = [r, -\alpha] \quad \arg(-z) \equiv \pi + \arg z \quad [2\pi] \quad \text{و} \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z} \quad \arg(z^n) \equiv n \arg z \quad [2\pi] \quad *$$

$$\forall (z; n) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{Z} \quad z^n = [r^n; n\alpha]$$

تمارين

تعتبر العددين العقديين $u=2-2i$ و $v=\sqrt{6}+i\sqrt{2}$

1- احسب معيار وعمدة كل من u و v

2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلثية لـ $\frac{u}{v}$ ثم استنتج $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$

خاصية

ليكن $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$

*- توجد نقطة وحيدة M حيث $\overline{OM} = \overline{AB}$ ومنه $M(z_B - z_A)$

و بالتالي $[2\pi]$ $\arg(z_B - z_A) = (\bar{e}_1; \overline{OM})$ إذن $[2\pi]$ $\arg(z_B - z_A) = (\bar{e}_1; \overline{AB})$

$$*\quad [2\pi] \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv (\bar{e}_1; \overline{CD}) - (\bar{e}_1; \overline{AB})$$

خاصية

إذا كان $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$ فإن $[2\pi]$ $\arg(z_B - z_A) = (\bar{e}_1; \overline{AB})$

$$و \quad [2\pi] \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overline{AB}; \overline{CD})$$

نتيجة

إذا كان $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $A \neq C(z_C)$ فإن $[2\pi]$ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv (\overline{AB}; \overline{AC})$

د/ تطبيقات

* **الاستقامية:** لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ نقط مختلفة

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi \quad [2\pi] \quad \text{أو} \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمة}$$

* **التعامد:** لتكن $A(z_A) \neq B(z_B)$ و $D(z_D) \neq C(z_C)$

$$[2\pi] \quad \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow (AB) \perp (CD)$$

تمارين

في المستوى العقدي المنسوب لمعلم م.م.م $(o; \bar{e}_1; \bar{e}_2)$

(1). نعتبر النقط $A(6+2i)$ و $B(-1+3i)$ و $C\left(\frac{7}{2}-3i\right)$ حدد قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{BA}; \widehat{BC})$

(2). نعتبر النقط $E(2+3i)$ و $F(1+2i)$ و $G(-1)$ حدد قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{FE}; \widehat{FG})$

$$\text{نضع } u_1 = 1-i \text{ ; } u_2 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{تمارين:}$$

1- حدد عمدة ومعيار u_1 و u_2

2- حدد عمدة ومعيار $\frac{u_1}{u_2}$ واستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

$$3- \text{بين أن } \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right)^{24} = 1$$

الحل

1- نحدد عمدة ومعيار u_1 و u_2

$$u_1 = 1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \left[\sqrt{2}; \frac{-\pi}{6} \right]$$

3- نحدد عمدة ومعيار $\frac{u_1}{u_2}$ ونستنتج $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\left[\sqrt{2}; \frac{-\pi}{4} \right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{-\pi}{6} \right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right] = \left[1; \frac{-\pi}{12} \right]$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{1-i}{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}} = \frac{(2-2i)(\sqrt{6}+i\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(\sqrt{6}+i\sqrt{2})} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) i$$

$$\left[1; \frac{-\pi}{12} \right] = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right) i \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \cos \frac{-\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{-\pi}{12} = -\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} i \right)^{24} = 1 \quad \text{3- نبين أن}$$

$$\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} i \right)^{24} = \left[1; \frac{\pi}{12} \right]^{24} = \left[1; \frac{24\pi}{12} \right] = [1; 2\pi] = 1$$

تمرين

ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ ، حدد معيار وعمدة الأعداد العقدية :

$$a = -\cos \theta + i \sin \theta \quad ; \quad b = \cos \theta - i \sin \theta \quad ; \quad c = -\cos \theta - i \sin \theta$$

$$a' = \sin \theta + i \cos \theta \quad ; \quad b' = \sin \theta - i \cos \theta \quad ; \quad c' = -\sin \theta - i \cos \theta \quad ; \quad d = -\sin \theta + i \cos \theta$$

الجواب

ليكن $\theta \in \mathbb{R}$ ،

$$a = -\cos \theta + i \sin \theta = \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta) = [1; \pi - \theta]$$

$$b = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = [1; -\theta]$$

$$c = -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta) = [1; \pi + \theta]$$

$$d = -\sin \theta + i \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \left[1; \frac{\pi}{2} + \theta \right]$$

$$a' = \sin \theta + i \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left[1; \frac{\pi}{2} - \theta \right]$$

$$b' = \sin \theta - i \cos \theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \left[1; -\frac{\pi}{2} + \theta \right]$$

$$c' = -\sin \theta - i \cos \theta = \sin(\pi + \theta) + i \cos(\pi + \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\pi + \theta)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi + \theta)\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \left[1; -\frac{\pi}{2} - \theta \right]$$

تمرين

$$z_1 = 2 - 2i \text{ و } z_2 = 2i \quad a = -4 \text{ نعتبر}$$

1 - حدد الشكل المثلثي لـ a و z_1 و z_2

$$2- \text{تحقق أن } a + z_1^2 + z_2^4 = -72$$

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر $A(a)$ و $B(z_1)$ و $C(z_2)$

3- (1.3) بين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

$$(2.3) \text{ حدد المجموعة } (F) \text{ حيث } (F) = \{M(z) / |z+1+i| = \sqrt{10}\}$$

3.3 (تحقق أن A و B و C تنتمي إلى (F) ثم أنشئ BAC و (F))

الحل

2 - نحدد الشكل المثلثي لـ a و z_1 و z_2

$$z_2 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right] \text{ و } z_1 = 2i = \left[2; \frac{\pi}{2}\right] \text{ و } a = -4 = [4; \pi]$$

$$4.2 - \text{نتحقق أن } a + z_1^2 + z_2^4 = -72$$

$$a + z_1^2 + z_2^4 = [4; \pi] + \left[2; \frac{\pi}{2}\right]^2 + \left[2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]^4 = [4; \pi] + [2; \pi]^2 + \left[(2\sqrt{2})^4; -\pi\right] = -4 - 4 - (2\sqrt{2})^4 = -4 - 4 - 64 = -72$$

3- (1.3) نبين أن BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

لدينا $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$

$$\widehat{(BA; BC)} \equiv \arg\left(\frac{2-2i-2i}{-4-2i}\right) \equiv \arg\left(\frac{2-4i}{-4-2i}\right)$$

$$\equiv \arg\left(\frac{i(-2i-4)}{-4-2i}\right) \equiv \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$BA = |-4-2i| = \sqrt{20} \quad BC = |2-4i| = \sqrt{20}$$

إذن المثلث BAC قائم الزاوية و متساوي الساقين في B

(2.3) نحدد المجموعة (F)

$$M(z) \in (F) \Leftrightarrow |z+1+i| = \sqrt{10}$$

$$M(z) \in (F) \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{10} \quad / \Omega(1+i)$$

$$M(z) \in (F) \Leftrightarrow M \in C(\Omega; \sqrt{10}) \quad / \Omega(-1; -1)$$

$$(F) = C(\Omega; \sqrt{10}) \quad / \Omega(-1; -1)$$

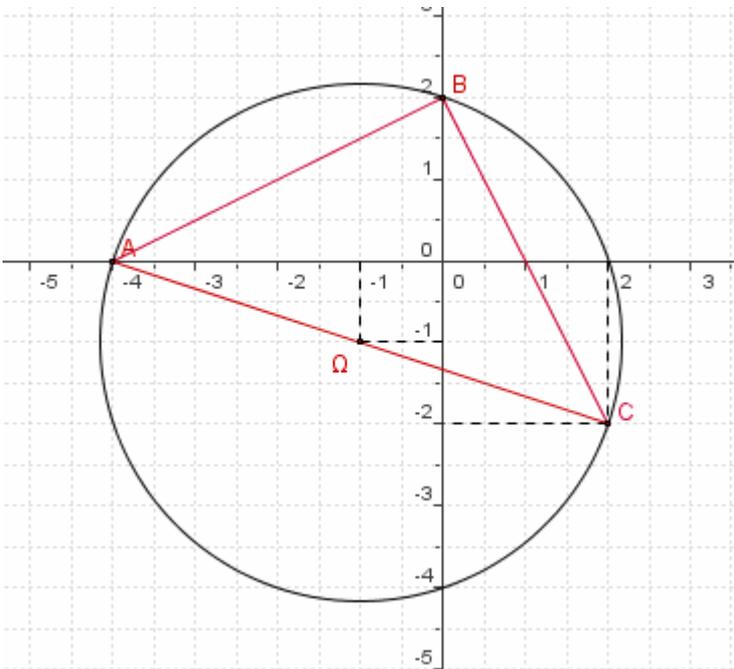
3.4 (تحقق أن $A(-4)$ و $B(2i)$ و $C(2-2i)$ تنتمي إلى (F) و ننشئ BAC و (F))

$$\Omega A = |-4+1+i| = |-3+i| = \sqrt{10}$$

$$\Omega B = |2i+1+i| = |1+3i| = \sqrt{10}$$

$$\Omega C = |2-2i+1+i| = |3-i| = \sqrt{10}$$

إذن A و B و C تنتمي إلى (F)



تمرين

في المستوى العقدي نعتبر النقط : $A(1+i)$ و B بحيث : $OA = OB$ و $[2\pi]$ $\overline{(OA, OB)} \equiv \frac{\pi}{3}$

(1) اعط الشكل الجبري ل z_B .

(2) احسب المسافة AB .

(3) حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $(\vec{e}_1, \overline{AB})$

الجواب

(1) نعطي الشكل الجبري ل z_B .

$$|z_B| = OB = OA = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{و منه} \quad 1+i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\arg(z_B) \equiv \overline{(\vec{e}_1; \overline{OB})} \equiv \overline{(\vec{e}_1; \overline{OA})} + \overline{(\overline{OA}; \overline{OB})} \equiv \arg(1+i) + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12} \quad [2\pi]$$

$$z_B = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \quad \text{ومنه}$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$z_B = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن}$$

(2) نحسب المسافة AB .

$$AB = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{2}$$

(3) نحدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة : $(\vec{e}_1, \overline{AB})$

$$(\vec{e}_1; \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) \equiv \arg \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1+\sqrt{3}}{2} - 1 - i \right) \equiv \arg \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right) \quad [2\pi]$$

$$(\vec{e}_1; \overline{AB}) \equiv \arg \left(\sqrt{2} \left[\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right) + i \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right) \right] \right) \equiv \arg \left(\sqrt{2} \left[-\sin \frac{7\pi}{12} - i \cos \frac{7\pi}{12} \right] \right) \quad [2\pi]$$

$$(\vec{e}_1; \overline{AB}) \equiv \arg \left(\left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12} \right] \right) \equiv \arg \left(\left[\sqrt{2}; -\frac{13\pi}{12} \right] \right) \equiv -\frac{13\pi}{12} \equiv \frac{11\pi}{12} \quad [2\pi]$$

إذن القياس الرئيسي ل $(\vec{e}_1, \overline{AB})$ هو $\frac{11\pi}{12}$

تمرين

نعتبر المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$f(z) = \frac{\bar{z}+i}{z} \quad \text{بـ } \mathbb{C}^*$$

1- حدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)|=1$

$$2- \text{نضع } z = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{حيث } \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

أ- مثل النقط $A(i)$ و $B(z)$ و $C(\bar{z})$ و $D(\bar{z}+i)$

ب- تحقق أن $OCDA$ معين واستنتج عمدة $\bar{z} + i$ بدلالة θ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ

ج- حدد معيار $f(z)$ بدلالة θ

الحل

1- نحدد مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)|=1$.

ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ نضع $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ و $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\bar{z} + i = x - iy + i = x + i(1 - y)$$

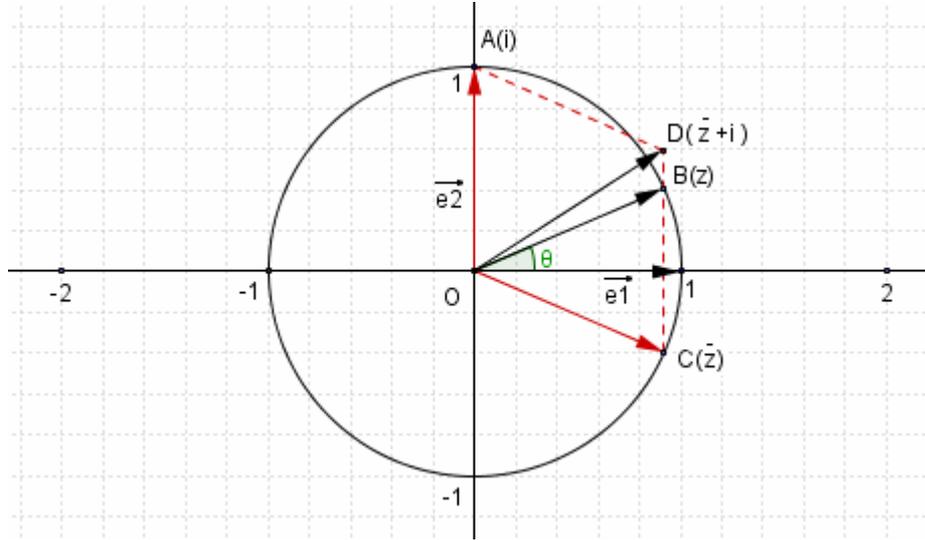
$$|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{z} + i}{z} \right| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} + i| = |z| \Leftrightarrow x^2 + (1 - y)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2y - 1 = 0$$

إذن مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث $|f(z)|=1$ هي المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}$

2- نضع $z = \cos \theta + i \sin \theta$ حيث $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

أ- نمثل النقط $A(i)$ و $B(z)$ و $C(\bar{z})$ و $D(\bar{z} + i)$

و $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OC}$ ممتثلان بالنسبة لمحور الافايل



ب- نتحقق أن $OCDA$ معين و نستنتج عمدة $\bar{z} + i$ بدلالة θ ثم عمدة $f(z)$ بدلالة θ

ومنه $OCDA$ معين $OC = |\bar{z}| = 1$; $OA = |i| = 1$; $CD = |i| = 1$; $AD = |\bar{z}| = 1$

$$\left(\overline{OA}; \overline{OD} \right) \equiv \frac{1}{2} \left(\overline{OA}; \overline{OC} \right) \quad [2\pi] \quad \text{ومنه } \left[\widehat{COA} \right] \text{ منصف } (OD)$$

$$\left(\overline{OA}; \overline{OD} \right) \equiv \frac{1}{2} (\arg(\bar{z}) - \arg(i)) \equiv \frac{1}{2} \left(-\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z} + i) \equiv (\bar{e}_1; \overline{OD}) \equiv (\bar{e}_1; \overline{OA}) + \left(\overline{OA}; \overline{OD} \right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z} + i) \equiv \arg(i) + \frac{1}{2} \left(-\theta - \frac{\pi}{2} \right) \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left(-\theta - \frac{\pi}{2} \right) \quad [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z} + i) \equiv -\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$\arg(f(z)) \equiv \arg(\bar{z} + i) - \arg(z) \quad [2\pi] \quad \text{ومنه } \arg(f(z)) = \arg\left(\frac{\bar{z} + i}{z}\right) \text{ لدينا}$$

$$\arg(f(z)) \equiv \frac{-\theta}{2} + \frac{\pi}{4} - \theta \equiv \frac{-3\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

ج- نحدد معيار $f(z)$ بدلالة θ

لدينا $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ومنه $|z| = 1$

$$|f(z)| = \left| \frac{\bar{z} + i}{z} \right| = |\bar{z} + i| = \sqrt{(\cos^2 \theta + (1 - \sin \theta)^2)} = \sqrt{2 - 2 \sin \theta} \text{ و بالتالي}$$

4 - الإزاحة و التحاكي و الاعداد العقدية أ/ الإزاحة

نعتبر t إزاحة متجهتها \bar{u} حيث $aff(\bar{u}) = a$ لتكن $M(z)$ و $M'(z')$

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \bar{u} \Leftrightarrow aff(\overline{MM'}) = aff(\bar{u}) \Leftrightarrow z' - z = a \Leftrightarrow z' = z + a$$

خاصية

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z+a)$ من المستوى (P) هو الإزاحة التي متجهتها \bar{u} حيث $aff(\bar{u}) = a$

تمرين

1- نعتبر الإزاحة $t_{\bar{u}}$ حيث $\bar{u}(1;2)$

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي بحيث $t_{\bar{u}}(M) = M'$

أ/ حدد z' بدلالة z

ب/ في المستوى العقدي نربط كل $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z' = z + 1 - i$

بين ان M' صورة M بإزاحة و حدد متجهتها

ب/ التحاكي نشاط

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \bar{e}_1; \bar{e}_2)$ و k عددا حقيقيا غير منعدم

نربط النقطة $M(z)$ من المستوى بالنقطة $M'(z')$ بالتحويل h حيث $z' - \omega = k(z - \omega)$

1/ حدد النقط الصامدة بـ h

2/ حدد علاقة متجهية بين النقطتين M و M' ثم حدد طبيعة h

خاصية

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ و $\Omega(\omega)$ نقط من من المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \bar{e}_1; \bar{e}_2)$ و k عددا حقيقيا غير منعدم

التحويل الذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوى (P) الى النقطة $M'(z')$ من المستوى (P)

حيث $z' - \omega = k(z - \omega)$ هو التحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k

تمرين

في المستوى العقدي نربط كل $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z' = \frac{1}{2}z + -2i$

1/ حدد ω لحق النقطة Ω حيث $\omega = \frac{1}{2}\omega + -2i$

2/ بين ان M' صورة M بتحاك h محددنا عناصره المميزة