



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

## درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

I. تقديم المجموعة  $\mathbb{C}$ :

## 01. نشاط:

لنعتبر المعادلة:  $x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$ (1) هذه المعادلة: ليس لها حل في  $\mathbb{R}$ . وهذا يفرض علينا أن نستعمل العدد  $i$  وهو عدد تخيلي حيث  $i^2 = (-i)^2 = -1$  ومنه نحصل على أن $i$  و  $-i$  حلين للمعادلة(2) لنعتبر المعادلة:  $(E) : x^2 - 2x + 2 = 0$ باستعمال نفس خاصيات عمليتي الجمع و الضرب في  $\mathbb{R}$  و العدد التخيلي  $i$  حيث  $i^2 = (-i)^2 = -1$ .تحقق أن: المعادلة  $(E)$  تكتب على الشكل الآتي  $(E) : (x-1)^2 + 1 = 0$ تحقق بأن:  $1+i$  و  $1-i$  حلي للمعادلة  $(E)$ 

## 02. مفردات:

- العدد  $i$  هو عدد تخيلي.
- العددان  $1+i$  و  $1-i$  نسميهما عددين عقديين و بصفة عامة
- نكتب عدد عقدي على الشكل  $z = a + bi$  مع  $a \in \mathbb{R}$  و  $b \in \mathbb{R}$ .

## 03. تعريف:

- عدد عقدي هو عدد يكتب على الشكل  $z = a + bi$  حيث  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$  و  $i$  يسمى عدد تخيلي يحقق  $i^2 = -1$ .
- الأعداد العقدية تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها ب:  $\mathbb{C}$ .
- المجموعة  $\mathbb{C}$  مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في  $\mathbb{R}$  ولهما نفس الخاصيات. ( التبادلية ؛ التجمعية ..... )

## 04. مفردات :

- $a + bi$  يسمى عدد عقدي و نرسم له في الغالب ب:  $z$
- المجموعة  $\mathbb{C}$  تسمى مجموعة الأعداد العقدية.
- الكتابة:  $a + bi$  تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي  $z$  او أيضا الشكل الجبري للعدد العقدي  $z$
- العدد الحقيقي  $a$  يسمى الجزء الحقيقي ل:  $z$  ونكتب:  $\text{Re}(z) = a$  مثال:  $\text{Re}(2-3i) = 2$
- العدد الحقيقي  $b$  يسمى الجزء التخيلي ل:  $z$  ونكتب:  $\text{Im}(z) = b$  مثال:  $\text{Im}(2-3i) = -3$
- العدد العقدي  $z' = a - bi$  يسمى مرافق العدد العقدي  $z$  ويرمز له ب:  $z' = \bar{z} = a - bi$
- مثال:  $z = 2 - 3i$  مرافقه هو  $\bar{z} = 2 + 3i$
- $a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow a = a'$  و  $b = b'$

## II. العمليات على الأعداد العقدية :

ليكن:  $z = x + yi$  و  $z' = x' + y'i$  من  $\mathbb{C}$ 

مثال	العملية : الجمع في $\mathbb{C}$
$z + z' = 1 + 5i + 2 - 3i = 3 + 2i$	$z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$
مثال	العملية : الضرب في $\mathbb{C}$
$z \times z' = (1 + 5i) \times (2 - 3i)$ $= 1 \times 2 + 5i \times (-3i) + (1 \times (-3) + 5 \times 2)i = 17 + 7i$	$z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$



<p>مثال</p> $-3 \times z = -3 \times (1 + 5i) = -3 - 15i \quad (1)$ $(2 + 3i) \times \overline{(2 + 3i)} = 2^2 + 3^2 = 13 \quad (2)$	<p>العملية : الضرب في <math>\mathbb{C}</math> (حالة خاصة )</p> $k.z = k.(x + yi) = kx + kyi \quad (1)$ $z \times \bar{z} = x^2 + y^2 \quad (2)$
<p>مثال</p> $\frac{1}{z'} = \frac{1}{2 - 3i} = \frac{2 + 3i}{(2 - 3i) \times (2 + 3i)}$ $= \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$	<p>المقلوب في <math>\mathbb{C}</math> (نستعمل مرافق <math>z'</math>)</p> $\frac{1}{z'} = \frac{1}{x' + y'i} = \frac{1 \times \bar{z}'}{z' \bar{z}'} =$ $= \frac{1 \times (x' - y'i)}{(x' + y'i)(x' - y'i)} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} - \frac{y'}{x'^2 + y'^2}i$
<p>مثال</p> $\frac{z}{z'} = \frac{1 + 5i}{2 - 3i} = \frac{(1 + 5i)(2 + 3i)}{(2 - 3i) \times (2 + 3i)}$ $= \frac{1 \times 2 + 5i \times 3i}{2^2 + 3^2} + \frac{5i \times 2 + 1 \times 3i}{2^2 + 3^2}$ $= \frac{-13}{13} + \frac{13}{13}i = -1 + i$	<p>الخارج في <math>\mathbb{C}</math> (نستعمل مرافق <math>z'</math>)</p> $\frac{z}{z'} = \frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{z \times \bar{z}'}{z' \times \bar{z}'} = \frac{1}{z' \times \bar{z}'} \times z \times \bar{z}'$ $= \frac{1}{x'^2 + y'^2} \times (x + yi)(x' - y'i)$ $= \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{yx' - xy'}{x'^2 + y'^2}i$

❖ أمثلة: أحسب ما يلي:

- $z_1 = 2 + 5i - (-4 + 2i) = 2 + 4 + (5 - 2)i = 6 + 3i$
- $z_2 = 2 + 5i - 3i(-4 + 2i) = 2 + 5i + 12i + 6 = 8 + 17i$
- $z_3 = (2 + 5i)(-4 + 2i) = 2 \times (-4) + 5i \times 2i + (2 \times 2 + 5 \times (-4))i = -18 - 16i$
- $z_4 = \frac{1}{1 + 3i} = \frac{1 \times (1 - 3i)}{(1 + 3i) \times (1 - 3i)} = \frac{1 - 3i}{1^2 + 3^2} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$
- $z_5 = \frac{2 + 3i}{5 - i} = \frac{(2 + 3i) \times (5 + i)}{(5 - i) \times (5 + i)} = \frac{10 - 3 + (2 + 15)i}{5^2 + 1^2} = \frac{7 + 17i}{26} = \frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$

❖ ملحوظة:

- $(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + (bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$
- $(a - bi)^2 = a^2 - 2abi + (-bi)^2 = a^2 - 2abi - b^2$
- $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$

III. التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

01. نشاط:

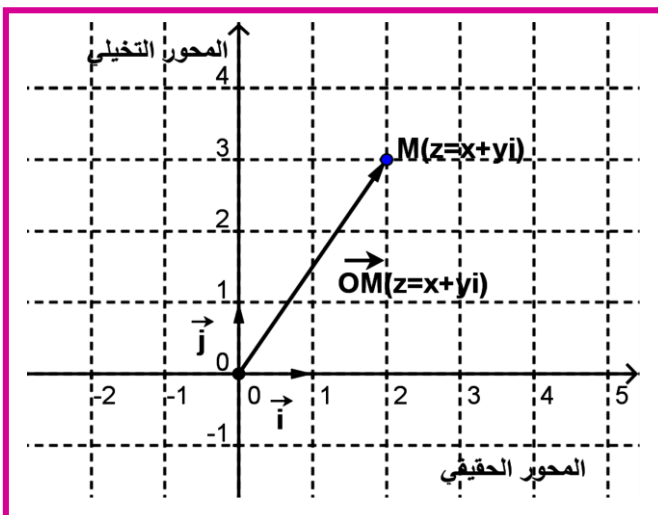
المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j})$

لنعتبر التطبيق

$$f: \mathbb{C} \rightarrow (P)$$

$$(\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \text{ أي } z = x + yi \mapsto f(z) = f(x + yi) = M(x, y)$$

(I) أنشئ النقاط التالية  $M_5, M_4, M_3, M_2, M_1$  صورة الأعداد التالية :





درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

## درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

$$z_5 = 2 - i \text{ و } z_4 = 2 + i \text{ و } z_3 = -2 - 3i \text{ و } z_2 = 3i \text{ و } z_1 = 3$$

## 02. مفردات:

- المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  يسمى المستوى العقدي.
- النقطة  $M(x, y)$  هي صورة العدد العقدي  $z = x + yi$ .
- نكتب:  $M(z)$  أو  $M(x+yi)$  نقرأ: النقطة  $M$  التي لحقها  $z$ . نكتب كذلك:  $Z_M$  ونقرأ  $z$  لحق النقطة  $M$ .
- المتجهة  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$  تسمى صورة العدد العقدي  $z$ .
- نكتب:  $\overline{OM}(z)$  أو  $\overline{OM}(x+yi)$  نقرأ  $\overline{OM}$  المتجهة التي لحقها  $z$ . نكتب كذلك:  $Z_{\overline{OM}}$  نقرأ  $z$  لحق المتجهة  $\overline{OM}$ .
- كل عدد عقدي حقيقي صرف  $z$  أي  $(z = x)$  صورته النقطة  $M(x, 0)$  تنتمي لمحور الأفاصيل  $(0, \vec{i})$  ولهذا  $(0, \vec{i})$  يسمى المحور الحقيقي.
- كل عدد عقدي تخيلي صرف  $z$  أي  $(z = yi)$  صورته النقطة  $M(0, y)$  تنتمي لمحور الأراتيب  $(0, \vec{j})$  ولهذا  $(0, \vec{j})$  يسمى المحور التخيلي.

## 03. نتائج:

- أربع نقط من المستوى العقدي أحاقها على التوالي:  $A(z_A); B(z_B); C(z_C); I(z_I)$ .
  - $Z_I = x_I + y_I i$  و  $Z_C = x_C + y_C i$
  - المتجهة  $\overline{AB}$  لحقها هو:  $Z_B - Z_A$ .
  - المتجهة  $k \cdot \overline{AB}$  لحقها هو:  $k \times (Z_B - Z_A)$ .
  - $I$  منتصف القطعة:  $[A, B]$  لحق  $I$  هو:  $Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$ .
  - $A$  و  $B$  و  $C$  نقط مختلفة مثنى مثنى هي مستقيمية  $(\overline{AC} = k\overline{AB})$  يكافئ  $Z_C - Z_A = k(Z_B - Z_A)$  و  $k \in \mathbb{R}$ . أو أيضا:
- $$\left( Z_B - Z_A \neq 0 \text{ مع } \right) \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = k \in \mathbb{R}$$

❖ نبرهن على أن: العدد العقدي  $Z_B - Z_A$  هو لحق المتجهة  $\overline{AB}$

$A$  و  $B$  نقطتان من المستوى العقدي لحاقهما على التوالي  $Z_A = x_A + y_A i$  و  $Z_B = x_B + y_B i$ .

•  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$  زوج إحداثيات المتجهة  $\overline{AB}$

• توجد نقطة وحيدة  $M$  من المستوى العقدي (P) حيث:  $\overline{AB} = \overline{OM}$ . إذن:  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$  هو زوج إحداثيات النقطة  $M$

ومنه: لحق النقطة  $M$  أو كذلك المتجهة  $\overline{AB} = \overline{OM}$  هو العدد العقدي:

$$Z_{\overline{AB}} = (x_B - x_A) + (y_B - y_A)i$$

$$= (x_B + y_B i) - (x_A + y_A i) = Z_B - Z_A$$

• خلاصة: العدد العقدي  $Z_B - Z_A$  هو لحق المتجهة:  $\overline{AB}$ .



## 04. مثال:

نعتبر  $I(z_I)$  منتصف القطعة  $[AB]$  .  
 نعتبر  $A(z_A = 2+i)$  ;  $B(z_B = -2+i)$  ;  $C(z_C = 5+xi)$  و  $I(z_I)$  أربع نقط من المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أوجد  $z_{\overline{AB}}$  لحق المتجهة  $\overline{AB}$ .

(2) أوجد  $z_I$  لحق  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$ .

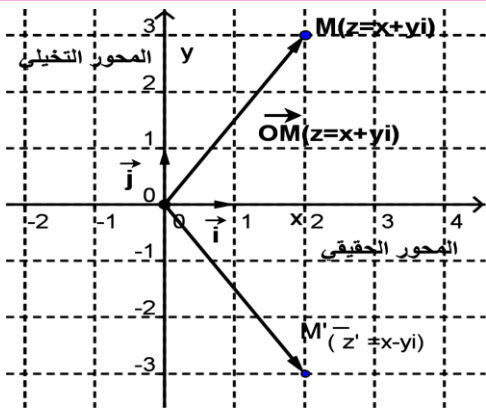
(3) حدد  $x$  حيث النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمية.

IV. مرافق عدد عقدي :

## 01. تعريف:

ليكن  $z = x + yi$  من  $\mathbb{C}$  مع  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$ .

العدد الحقيقي  $x - yi$  يسمى مرافق العدد العقدي  $z$  و نرمز له ب:  $\overline{z} = x - yi = \overline{x + yi}$ .



## 02. أمثلة:

$\overline{z} = \overline{1 + 5i} = 1 - 5i$	لدينا:	$z = 1 + 5i$
$\overline{z} = \overline{-1 - 3i} = -1 + 3i$	لدينا:	$z = -1 - 3i$
$\overline{z} = \overline{1} = 1$	لدينا:	$z = 1$
$\overline{z} = \overline{2i} = -2i$	لدينا:	$z = 2i$
$\overline{z} = \overline{-6i} = 6i$	لدينا:	$z = -6i$

## 03. خاصيات المرافق:

$\mathbb{C}$  من  $z' = x' + y'i$  و  $z = x + yi$

▪  $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$  و  $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$  و  $\overline{\overline{z}} = z$

▪  $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$

▪  $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$  و  $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

▪  $\overline{z^p} = (\overline{z})^p$  و  $(z' \neq 0)$  ;  $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$  ;  $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$

## 04. أمثلة:

•  $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$

•  $\overline{(2 + 3i) + 1 - 2i} = \overline{2 + 3i + 1 - 2i} = \overline{3 + i} = 3 - i$

•  $\overline{(2 + 3i) \times (1 - 5i)} = \overline{2 + 3i \times 1 - 5i} = \overline{(2 - 3i)(1 + 5i)}$

•  $\overline{\left(\frac{2 + 3i}{1 - 5i}\right)} = \frac{\overline{2 + 3i}}{\overline{1 - 5i}} = \frac{2 - 3i}{1 + 5i}$  و  $\overline{\left(\frac{1}{1 - 5i}\right)} = \frac{1}{\overline{1 - 5i}} = \frac{1}{1 + 5i}$

•  $\overline{(2 + 3i)^n} = (2 - 3i)^n$



## 05. ملحوظة:

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$  ؛ (أي  $z$  عددا حقيقيا صرفا).
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$  ؛ (أي  $z$  عددا تخيليا صرفا)

## V. معيار عدد عقدي :

## 01. نشاط:

لتكن  $M_{(z=x+yi)}$  نقطة من المستوى العقدي المنسوب

إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أوجد:  $z \times \bar{z}$

(2) أعطي كتابة للمتجهة  $\overline{OM}$  في المعلم  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

(3) أوجد  $\|\overline{OM}\|$ . ماذا تستنتج؟

## 02. تعريف :

$z = x + yi$  من  $\mathbb{C}$  مع  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$ .

العدد الحقيقي الموجب  $\sqrt{zz}$  يسما معيار العدد العقدي  $z = x + yi$ . نكتب:  $|z| = \sqrt{zz} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

## 03. التأويل الهندسي للمعيار

إذا كان  $z = x + yi$  لحق  $M$  فإن:  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\overline{OM}\|$  يمثل المسافة بين أصل المعلم و النقطة  $M$ .

## 04. أمثلة:

- $|-7| = |-7 + 0i| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2} = 7$  .  $|5| = |5 + 0i| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$
- $|-2i| = |0 - 2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$  .  $|2i| = |0 + 2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$
- $|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$  .  $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

## 05. خاصيات المعيار:

$z = x + yi$  و  $z' = x' + y'i$  من  $\mathbb{C}$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{و} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{و} \quad |\bar{z}| = |-z| = |z|$$

$$(z' \neq 0) ; \frac{|z|}{|z'|} = \left| \frac{z}{z'} \right| ; \frac{|1|}{|z'|} = \frac{1}{|z'|} ; |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$z \neq 0 \quad \text{و} \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{مع} \quad |z^p| = |z|^p$$

## 06. أمثلة:

$$|\overline{1+i}| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}$$

$$|(1-i) \times (2+3i)| = |1-i| \times |2+3i| = \sqrt{2} \times \sqrt{13} = \sqrt{26}$$



$$\left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{|1+i|}{|2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \bullet$$

$$|-i+i| \leq |-i|+|i| \Leftrightarrow 0 \leq 1+1 \quad \bullet$$

$$|(1+i)^6| = |1+i|^6 = (\sqrt{2})^6 = 8 \quad \bullet$$

**07. تمرين:**

أحسب معيار الأعداد العقدية:  $z_1 = -5+3i$  و  $z_2 = 4i(-2+3i)$  و  $z_3 = 1+i\sqrt{3}$  و  $z_4 = 5+i5\sqrt{3}$  و  $z_5 = \frac{7}{1-i\sqrt{3}}$  و

$$z_7 = \frac{4(1+i)^2}{2i(-5-i5\sqrt{3})^6} \quad \text{و} \quad z_6 = \frac{4(1+i)}{2i(-5-i5\sqrt{3})}$$

**08. نتائج هندسية:**

A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي ألقاها  $z_A = x_A + y_A i$  و  $z_B = x_B + y_B i$  و  $z_C = x_C + y_C i$  على التوالي مع  $z_A \neq z_C$ . لدينا:

$$\|\overline{AB}\| = AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \bullet$$

$$\frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1 \quad \text{ومنه:} \quad \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} \quad \bullet$$

المثلث ABC متساوي الساقين في A

**09. مثال:**

ثلاث نقط من المستوى العقدي.  $C(z_C = 3i); B(z_B = -1+i); A(z_A = 1+i)$

(1) نحسب أطوال أضلاع المثلث ABC. لدينا:

$$AB = |z_B - z_A| = |-1+i - (1+i)| = |-2| = 2 \quad \bullet$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3i - (1+i)| = |-1+2i| = \sqrt{5} \quad \bullet$$

$$CB = |z_B - z_C| = |-1+i - (3i)| = |-1-2i| = \sqrt{5} \quad \bullet$$

(2) ماهي طبيعة المثلث ABC.

بمان:  $AC = CB$  المثلث ABC متساوي الساقين في C.

**VI. عدة لعدد عقدي غير منعدم:**

**01. نشاط:**

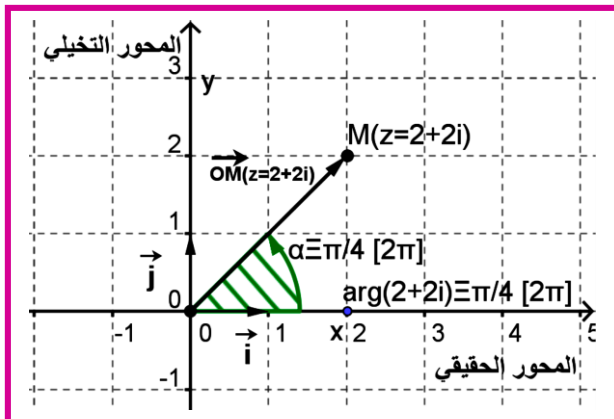
لنأخذ عدد عقدي  $z$  غير منعدم و  $M$  صورته في المستوى العقدي إن:  $M \neq O$

مثال:  $z = 2+2i$  من  $\mathbb{C}^*$ .

**02. تذكير:**

- لنأخذ الزاوية الموجهة:  $(\vec{i}, \overline{OM})$

$$(\vec{i}, \overline{OM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \quad \text{أو أيضا:} \quad (\vec{i}, \overline{OM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$





درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

## درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

## 03. مفردات :

- قياس للزاوية الموجهة  $(\vec{i}, \overline{OM})$  و هو يسمى عمدة العدد العقدي  $z = 2 + 2i$
- كذلك كل قياس من بين القياسات  $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ( مع  $k \in \mathbb{Z}$  ) للزاوية الموجهة  $(\vec{i}, \overline{OM})$  يسمى عمدة العدد العقدي  $z = 2 + 2i$ .
- نرسم للعمدة العدد العقدي الغير المنعدم  $z = 2 + 2i$  ب:  $\arg(z) \equiv \left( \vec{i}, \overline{OM} \right) [2\pi]$  أو  $\arg(2 + 2i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- كل عدد من بين الأعداد التي هي على شكل  $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  مع  $k \in \mathbb{Z}$  هو كذلك عمدة العدد العقدي  $z = 2 + 2i$
- بصفة عامة نكتب:  $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$  أو  $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$
- ونفضل أخذ  $\alpha \in ]-\pi, \pi]$  ( أي القياس الرئيسي للزاوية الموجهة  $(\vec{i}, \overline{OM})$  ) كعمدة للعدد العقدي الغير المنعدم  $z$ .
- العدد العقدي  $z = 0$  ليس له عمدة (لأن  $M = O$  ضلع غير محدد لهذه الزاوية)

## 04. تعريف:

ليكن  $z$  عدد عقدي غير منعدم و  $M$  صورته في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  إذن:  $M \neq O$ .

- كل قياس  $\alpha$  للزاوية الموجهة  $(\vec{i}, \overline{OM})$  يسمى عمدة العدد العقدي  $z$  ويرمز له ب:  $\arg(z)$

نكتب:  $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$  أو  $\arg(z) = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

## 05. أمثلة:

1- أنشئ في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  النقاط التالية:  $M_1(z_1=2)$  و  $M_2(z_2=-3)$  و  $M_3(z_3=2i)$  و

$M_4(z_4=-3i)$  و  $M_5(z_5=1+i)$  و  $M_6(z_6=1-i)$  و  $M_7(z_7=2+2i)$  و  $M_8(z_8=-1-i)$

2- استنتج عمدة لحق النقاط السابقة.

## 06. ملحوظة:

و  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$ .  $z \neq 0$  ( أي  $(a, b) \neq (0, 0)$  ) حيث:  $z = a + bi$  و  $-z = -a - bi$  و  $\bar{z} = a - bi$

•  $\arg(a) \equiv 0 [2\pi]$  لدينا:  $z = a > 0$  مثال:  $\arg(3) \equiv 0 [2\pi]$

•  $\arg(a) \equiv \pi [2\pi]$  لدينا:  $z = a < 0$  مثال:  $\arg(-3) \equiv \pi [2\pi]$

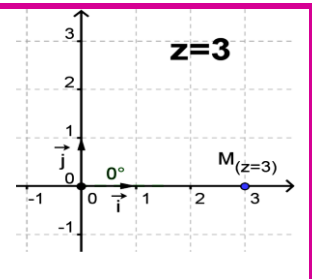
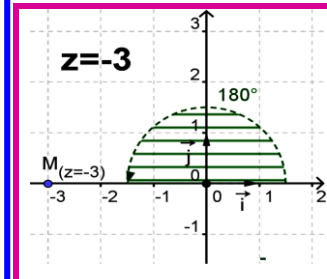
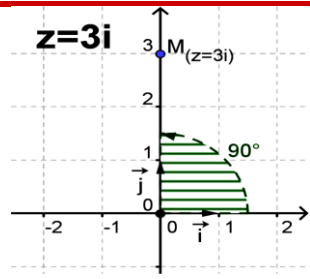
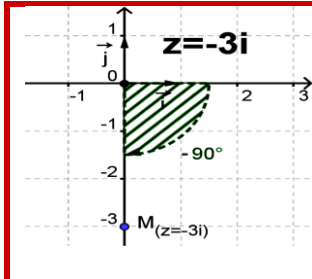
•  $\arg(bi) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  لدينا:  $z = bi$ ;  $b > 0$  مثال:  $\arg(3i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

•  $\arg(bi) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$  لدينا:  $z = bi$ ;  $b < 0$  مثال:  $\arg(-3i) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi]$

•  $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$  لدينا:  $z \neq 0$  مثال:  $\arg(-2-2i) \equiv \pi + \frac{\pi}{4} [2\pi]$  و  $\arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

•  $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$  لدينا:  $z \neq 0$  مثال:  $\arg(\overline{2-2i}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$  و  $\arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

أمثلة ميبانيا:



## 07. خاصيات العمدة:

## خاصية

ليكن  $z$  و  $z'$  من  $\mathbb{C}^*$  لدينا:

- $\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$
- $p \in \mathbb{Z} ; \arg(z^p) \equiv p \times \arg z [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -\arg z' [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$
- إذا كان  $k > 0$  فإن:  $\arg(kz) \equiv \arg(z) [2\pi]$
- إذا كان  $k < 0$  فإن:  $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$

## 08. البرهان ( انظر الشكل المثلثي و العمليات )

## 09. مثال:

أوجد عمدة:  $z_1 = 1 + i$  و  $z_2 = 4i(1 + i)$  و  $z_3 = (1 - i)$  و  $z_4 = (1 - i)(1 + i)^8$  و  $z_5 = 1 - i\sqrt{3}$  و  $z_6 = \frac{(1 + i)}{(1 - i\sqrt{3})}$

## VII. شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

## 01. نشاط:

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم. م. م. م.  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

• نأخذ عدد عقدي  $z = x + yi$  غير منعدم و صورته في المستوى

العقدي (P) إذن:  $M \neq O$  مع:  $\arg(z) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha [2\pi] (\mathcal{C})$

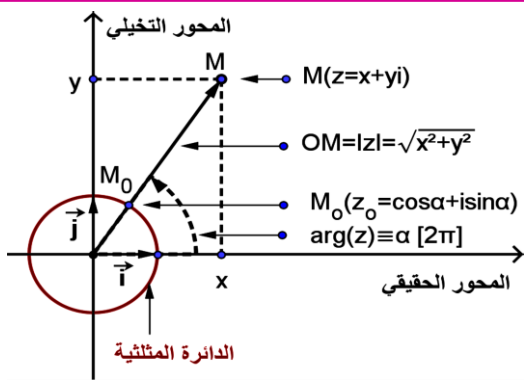
• الدائرة المثلثية المرتبطة بالمعلم  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  تقطع نصف المستقيم

في  $[O, M)$  و  $M_0$  و لحقها هو  $z_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha$

• لدينا:  $M_0$  و  $M$  و  $O$  مستقيمية و  $\overrightarrow{OM_0}$  و  $\overrightarrow{OM}$  لهما نفس الاتجاه و منه:  $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM_0}$  مع  $k > 0$  (لأن  $M \neq O$ )

\* لحق  $\overrightarrow{OM}$  هو  $z = x + yi$ . لحق  $\overrightarrow{OM_0}$  هو  $z_0 = \cos \alpha + i \sin \alpha$

• لدينا:  $O$  و  $M$  و  $M_0$  مستقيمية و منه:  $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM_0}$ . إذن:  $z = kz_0 \Leftrightarrow x + yi = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ .







درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

## درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

نحصل على (1):  $x + yi = k(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ نحدد  $z = kz_0$ :  $k$  إذن  $\sqrt{x^2 + y^2} = |k| = k$   $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = |k| |z_0| \Leftrightarrow |z| = |kz_0|$ نحصل على (2):  $k = \sqrt{x^2 + y^2}$ • حسب العلاقة (1) و (2) نحصل على العلاقة التالية:  $z = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ 

## 02. مفردات:

1) الكتابة:  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  (3) تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم  $z = x + yi$ .2) الكتابة (3): نكتبها كذلك على الشكل الآتي:  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = [ |z|, \arg(z) ] = [r, \alpha]$ 

## 03. تعريف وخاصية:

ليكن عدد عقدي  $z = x + yi$  من  $\mathbb{C}^*$  و  $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$  و  $r = |z|$ ▪ العدد العقدي  $z$  يكتب على شكل:  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  أو  $z = \sqrt{x^2 + y^2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  أو

$$z = [ |z|, \arg(z) ] = [r, \alpha]$$

▪ كل كتابة من الكتابات السابقة تسمى شكل مثلثي للعدد العقدي الغير المنعدم  $z$ .

## 04. أمثلة:

نعطي الشكل المثلثي ل:

▪  $z_2 = -5 = 5(-1 + 0i) = 5(\cos \pi + i \sin \pi) = [2, \pi]$   $z_1 = 2 = 2(1 + 0i) = 2(\cos 0 + i \sin 0) = [2, 0]$

▪  $z_3 = 7i = 7(0 + i) = 7\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left[7, \frac{\pi}{2}\right]$

▪  $z_4 = -\frac{3}{5}i = \frac{3}{5}(0 - i) = \frac{3}{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\frac{3}{5}, -\frac{\pi}{2}\right]$

▪  $z_5 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

## 05. ملحوظة: (1) الشكل المثلثي ( حالات خاصة )

مثال	$a > 0$ و $b > 0$ الشكل المثلثي
$z = 3 = [3, 0]$	$z = a = [a, 0]$
$z = -3 = [3, \pi]$	$z = -a = [a, \pi]$
$z = 3i = \left[3, \frac{\pi}{2}\right]$	$z = bi = \left[b, \frac{\pi}{2}\right]$
$z = -3i = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$	$z = -bi = \left[b, -\frac{\pi}{2}\right]$

لدينا:  $z = [r, \alpha]$  و  $-z = [r, \pi + \alpha]$  و  $\bar{z} = [r, -\alpha]$  و  $-\bar{z} = [r, \pi - \alpha]$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

10

الصفحة

## درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

$$-z = \left[ \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} + \pi \right] = \left[ \sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \text{ و } \bar{z} = \left[ \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \text{ فإن } z = 1+i = \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]$$

$$.z_4 = 1 - \sqrt{3} = \left[ 2, -\frac{\pi}{3} \right] \text{ و } z_3 = 1 + \sqrt{3} = \left[ 2, \frac{\pi}{3} \right] \text{ و } 1 - i = \left[ \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \text{ و } 1 + i = \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] \text{ : ملحوظة: } \mathbf{06}$$

## .07 الشكل المتثلثي و العمليات

$z' = [r', \alpha'] = r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$  و  $z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  حيث  $\mathbb{C}^*$  من  $z'$  و  $z$

جاء  $z'$  و  $z$  :  $z \times z' = [r, \alpha] \times [r', \alpha'] = [r \times r', \alpha + \alpha']$  أو  $z \times z' = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \times r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')$  أو  $zz' = rr'(\cos(\alpha + \alpha') + i \sin(\alpha + \alpha'))$

نتيجة لذلك:  $z^n = [r, \alpha]^n = [r^n, n\alpha]$  أو  $z^n = (r(\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$

حالة خاصة:  $r = 1$  نحصل على:  $[1, \alpha]^n = [1^n, n\alpha] = [1, n\alpha]$

أو أيضا:  $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = (\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$  هي تسمى صيغة موافر (formule de MOIVRE)

مقلوب  $z'$ :  $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{1}{r'}(\cos(-\alpha') + i \sin(-\alpha'))$  أو  $\frac{1}{z'} = \frac{1}{[r', \alpha']} = [r', -\alpha']$

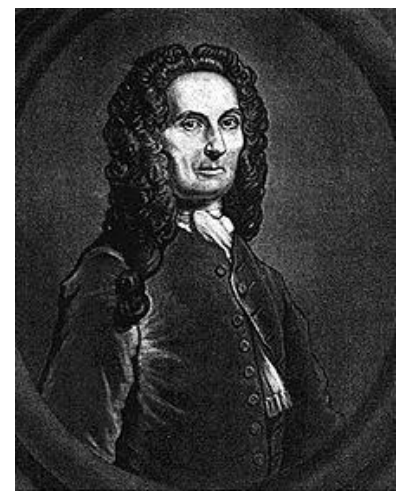
خارج  $z$  و  $z'$ :  $\frac{z}{z'} = \frac{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{r'(\cos \alpha' + i \sin \alpha')} = \frac{r}{r'}(\cos(\alpha - \alpha') + i \sin(\alpha - \alpha'))$  أو  $\frac{z}{z'} = \frac{[r, \alpha]}{[r', \alpha']} = \left[ \frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right]$

$-z = -1 \times z = [1, \pi][r, \alpha] = [r, \alpha + \pi] = r((\cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)))$

$\bar{z} = \overline{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)) = [r, -\alpha]$

## Données clés

Naissance	<a href="#">26 mai 1667</a> <a href="#">Vitry-le-François (France)</a>
Décès	<a href="#">27 novembre 1754</a> (à 87 ans) <a href="#">Londres (Angleterre)</a>
Domicile	Angleterre
Nationalité	<a href="#">Français</a>
Champs	<a href="#">Mathématiques</a>
Institutions	<a href="#">Royal Society</a>
Diplôme	<a href="#">Académie de Saumur</a>
Renommé pour	<a href="#">Formule de Stirling</a> <a href="#">Théorème de Moivre-Laplace</a> <a href="#">Formule de Moivre</a>



Abraham de Moivre en 1736

## .08 أمثلة:

نعت الشكل المتثلثي ل:

$$i \times z = \left[ 1, \frac{\pi}{2} \right] \times [r, \alpha] = \left[ r, \frac{\pi}{2} + \alpha \right]$$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

11

الصفحة

## درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

$$z_1 = 3 + 3i = 3(1+i) = [3,0] \times \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] = \left[ 3\sqrt{2}, 0 + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_2 = -3 - 3i = -3(1+i) = [3,\pi] \times \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] = \left[ 3\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_3 = 2i(7+7i) = 14i(1+i) = \left[ 14, \frac{\pi}{2} \right] \times \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right] = \left[ 14\sqrt{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right]$$

$$z_4 = \frac{1}{-4-4i} = \frac{1}{-4(1+i)} = \frac{1}{[4,\pi] \times \left[ \sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right]} = \frac{1}{\left[ 4\sqrt{2}, \pi + \frac{\pi}{4} \right]} = \left[ \frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{5\pi}{4} \right] = \left[ \frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

09. تمرين : أعط الشكل المثلثي ل:

$$z_5 = -\frac{5}{7}i(1+\sqrt{3}i) \text{ و } z_4 = (-8-8\sqrt{3}i)^{15} \text{ و } z_3 = \frac{5i}{-4-4i} \text{ و } z_2 = -8-8\sqrt{3}i \text{ و } z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

10. ملحوظة: العلاقة التي تربط الشكل الجبري و الشكل المثلثي حيث  $[z, \theta] = x + yi$  لدينا:  $x = |z| \cos \theta$  و  $y = |z| \sin \theta$ 

VIII. الترميز الأسى لعدد عقدي غير منعدم:

01. تعريف:

كل عدد عقدي  $z$  غير منعدم حيث:  $z = [r, \alpha] = [|z|, \arg z]$   
 نكتبه على شكل:  $z = [r, \alpha] = re^{i\alpha}$  وتسمى الشكل الأسى للعدد  $z$  إذن:  $z = [r, \alpha] = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = re^{i\alpha}$   
 وهذه الكتابة تحقق ما يلي: لكل  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$  و  $n$  من  $\mathbb{Z}$   
 $(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha}$ ;  $\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$ ;  $\frac{1}{e^{i\beta}} = e^{-i\beta}$ ;  $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

02. مثال:

الشكل الأسى للأعداد العقدية التالية:

$$z_4 = -2i = 2e^{-\frac{\pi}{2}i}; z_3 = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}; z_2 = -2 = 2e^{i\pi}; z_1 = 2 = 2e^{i0}$$

$$z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}; z_2 = 1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}; z_1 = 1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

03. صيغتا أولير: FORMULES D EULER

ليكن  $\alpha$  من  $\mathbb{R}$  و  $z$  و  $z'$  عدد عقدي معياره 1 و عمدته  $\alpha$ إذن:  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$  ومنه نستنتج أن:

$$\left. \begin{aligned} z &= \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} \\ \bar{z} &= \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} z + \bar{z} = 2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \\ z - \bar{z} = 2i \sin \alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \end{cases}$$



Leonhard EULER  
(Bâle 1707, Saint-Petersbourg 1783)

La notation  $i$  fut introduite par Euler, le grand mathématicien suisse. Dans ce livre, on notera  $j$  à la place de  $i$ , notation utilisée pour l'intensité en électricité.



Données clés

Naissance

15 avril 1707  
Bâle (Suisse)

Décès

18 septembre 1783 (à 76 ans)  
Saint-Petersbourg (Russie)

Nationalité

+ Suisse

Champs

Mathématiques et physique

Institutions

Académie des sciences de Russie  
Académie de Berlin

Renommé pour

Liste complète

Signature

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

❖ صيغتا أولير

ليكن  $\alpha$  من  $\mathbb{R}$  و  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$ 

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \end{cases}$$

كل صيغة تسمى صيغة أولير

**04. ملحوظة:**

حسب صيغة موافر

$$z^n = [1, \alpha]^n = (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

$$(\bar{z})^n = [1, -\alpha]^n = (e^{-i\alpha})^n = e^{-in\alpha} = \cos n\alpha - i \sin n\alpha$$

$$z^n + (\bar{z})^n = 2 \cos n\alpha$$

$$z^n - (\bar{z})^n = 2i \sin n\alpha$$

$$z^n \times (\bar{z})^n = (z \times \bar{z})^n = (1^2)^n = 1$$

❖ صيغ :

$$z^n \times (\bar{z})^n = 1 \text{ و } z^n - (\bar{z})^n = 2i \sin n\alpha \text{ و } z^n + (\bar{z})^n = 2 \cos n\alpha$$

**05. تطبيق : الإخطاط :**أخطط :  $\cos^3 x$ لدينا:  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$ . حسب صيغة أولير:

$$\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} (z + \bar{z})^3 = \frac{1}{8} (z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z(\bar{z})^2 + (\bar{z})^3) = \frac{1}{8} (z^3 + (\bar{z})^3 + 3z\bar{z}(z + \bar{z}))$$

$$= \frac{1}{8} (2 \cos 3x + 3 \times 1 \times 2 \cos x) = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$$

خلاصة:  $\cos^3 x = 2 \cos 3x + 6 \cos x$ **IX. الأعداد العقدية و الهندسة****01. زاوية محددة بمتجهتين و عمدة خارج لحقيهما:**



لتكن A و B و C و D أربع نقط من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى ، ألقها  $z_A$  و  $z_B$  و  $z_C$  و  $z_D$  على التوالي لدينا:

▪ المسافة AB هي :  $AB = |z_B - z_A|$  .

▪ منتصف القطعة [AB] لحقها  $z_I$  هو :  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$  .

▪ المتجهة  $\overrightarrow{AB}$  لحقها هو :  $z_B - z_A$  .  
قياس الزاوية الموجهة ل :

▪  $(\vec{i}, \overrightarrow{AB})$  هو :  $\arg(z_B - z_A) [2\pi]$

▪  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  هو :  $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

▪  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$  هو :  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

▪ استقامية ثلاث نقط : A و B و C يكافئ :  $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$  أي  $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$  أي  $k \in \mathbb{R}$  مع  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k$  مع  $A \neq B$

▪ استقامية ثلاث نقط : A و B و C يكافئ :  $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$  أو  $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]$

▪ استقامية متجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  يكافئ  $\frac{z_u}{z_v}$  عدد حقيقي صرف (مع  $z_v \neq 0$ )

▪ تعامد متجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  يكافئ  $\frac{z_u}{z_v}$  عدد تخيلي صرف (مع  $z_v \neq 0$ )

▪  $(CD) // (AB)$  يكافئ :  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$  أو  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi [2\pi]$  (أي  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [\pi]$ )

▪  $(CD) \perp (AB)$  يكافئ :  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  أو  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  (أي  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ )

▪ النقط A و B و C و D متداورة أو مستقيمة يكافئ :  $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$  أو .....

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$ z - z_A  =  z - z_B $	1. $AM = BM$ 2. M تنتمي لواسط [AB]	$\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right  = 1$	المثلث ABC متساوي الساقين في A
$ z - z_A  = k \ (k > 0)$	M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها $r = k$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2}\right] = e^{\pm \frac{\pi}{2}i}$	المثلث ABC متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2}\right] = re^{\pm \frac{\pi}{2}i}$	المثلث ABC قائم الزاوية في A	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{3}\right] = e^{\pm \frac{\pi}{3}i}$	المثلث ABC متساوي الأضلاع



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

14

الصفحة

درس مجموعة الأعداد العقدية الجزء I

02. ملحوظة :

$$\bullet \quad (\cos \theta + \sin \theta) + (\cos \theta' + \sin \theta') = e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}$$

$$\bullet \quad (\cos \theta + \sin \theta) - (\cos \theta' + \sin \theta') = e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta + \theta'}{2}}$$

$$\bullet \quad 1 + (\cos \theta + \sin \theta) = 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\bullet \quad 1 - (\cos \theta + \sin \theta) = 1 - e^{i\theta} = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$