

## دراسة الدوال و تمثيلها باستعمال دوال مرجعية

### 1- دراسة و تمثيل مبانيا الدالة $f: x \rightarrow ax^2$ حيث $a \neq 0$

#### أ- أمثلة

$$f(x) = 2x^2$$

\* نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بـ

- ندرس تغيرات  $f$   
 $D_f = \mathbb{R}$

$f$  دالة زوجية و منه اقتصار دراستها على  $[0; +\infty[$

ليكن  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$  حيث  $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 2(x + y)$$

لكل  $x$  و  $y$  من  $[0; +\infty[$  حيث  $x \neq y$  :

إذن  $f$  تزايدية على  $[0; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$			

معادلة  $C_f$  هي  $y = 2x^2$

$C_f$  متماثل بالنسبة لمحور الأرتاب

#### ملاحظة

إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $0 < 2x^2 < 2x$

هذا يعني أن جزء  $C_f$  على  $]0; 1[$

تحت المستقيم  $(\Delta): y = 2x$

إذا كان  $x > 1$  فإن  $2x^2 > 2x$

هذا يعني أن جزء  $C_f$  على  $]1; +\infty[$

فوق المستقيم  $(\Delta): y = 2x$

جدول القيم

$x$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$\frac{3}{2}$	$2$
$f(x)$	$0$	$\frac{1}{2}$	$2$	$\frac{9}{2}$	$8$

$C_f$  شلجم رأسه  $O$  يقبل محور الأرتاب

كمحور تماثل

\* بالمثل أدرس الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{-1}{2}x^2$

#### ب- الحالة العامة

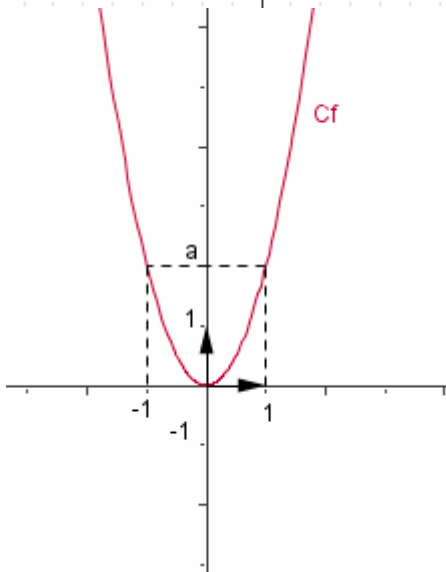
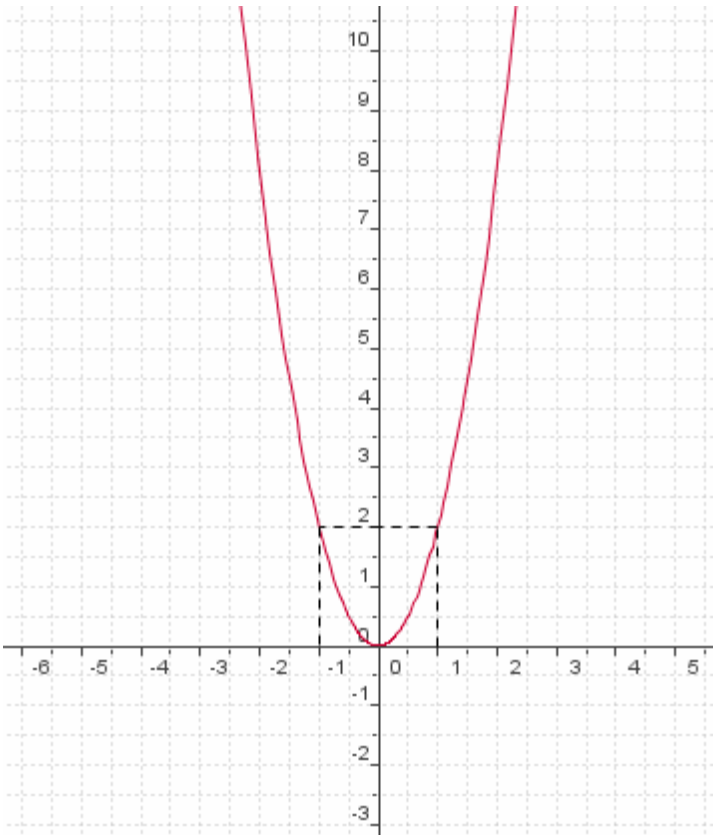
نعتبر الدالة العددية  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بـ

$$f(x) = ax^2 \text{ حيث } a \neq 0$$

إذا كان  $a > 0$  فإن

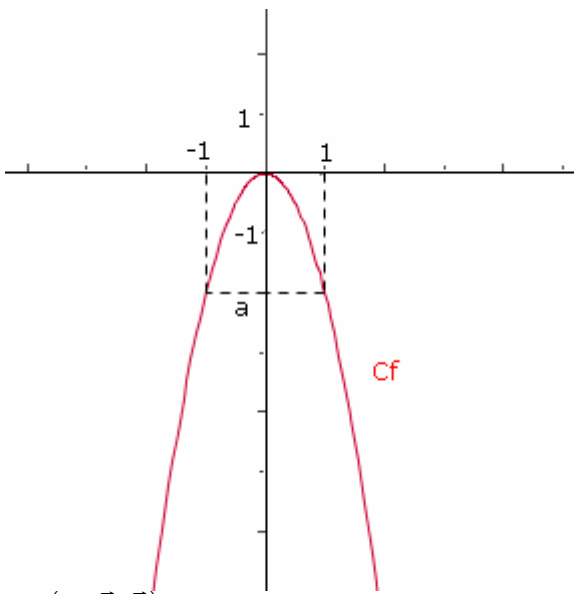
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$			

$C_f$  شلجم رأسه  $O$  يقبل محور الأرتاب كمحور تماثل



إذا كان  $a < 0$  فان

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f$	$\swarrow$ 0 $\searrow$		



$C_f$  شلجم رأسه  $O$  يقبل محور الأرتاب كمحور تماثل

**تمرين**  $f(x) = x^2$   $g(x) = \frac{1}{2}x^2$

$h(x) = 3x^2$   $m(x) = -2x^2$

1- أعط جدول تغيرات  $f$  و  $g$  و  $h$  و  $m$

2- في نفس المعلم المتعامد الممنظم

أنشئ  $C_f$  و  $C_g$  و  $C_h$  و  $C_m$

**2- دراسة الدالة**  $x \rightarrow ax^2 + bx + c$

لتكن  $M(x; y)$  و  $M'(X; Y)$  نقطتين و  $\bar{u}(\alpha; \beta)$  متجهة في مستوى منسوب الى معلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

و  $t$  الإزاحة ذات المتجهة  $\bar{u}$

$$\begin{cases} X = x + \alpha \\ Y = y + \beta \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} X - \alpha = x \\ Y - \beta = y \end{cases} \text{ تكافئ } \overline{MM'} = \bar{u} \text{ تكافئ } t(M) = M'$$

**مثال 1** لندرس  $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$  حيث

الشكل القانوني لـ  $f(x)$  هو  $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$

معادلة  $C_f$  في المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  هي  $y = 2(x-1)^2 - 5$  أي  $y + 5 = 2(x-1)^2$

نعتبر  $t$  الإزاحة ذات المتجهة  $\bar{u}(1; -5)$  و لتكن  $M(x; y)$  و  $M'(X; Y)$  نقطتين

ليكن  $(C)$  منحنى الدالة  $x \rightarrow 2x^2$

لنبين أن  $C_f$  هو صورة  $(C)$  بالإزاحة  $t$

$$\begin{cases} X - 1 = x \\ Y + 5 = y \end{cases} \text{ تكافئ } t(M) = M'$$

$$y = 2x^2 \text{ تكافئ } M(x; y) \in (C)$$

$$Y + 5 = 2(X - 1)^2 \text{ تكافئ}$$

$$M'(X; Y) \in (C_f) \text{ تكافئ}$$

إذن  $(C_f)$  هو صورة  $(C)$  بالإزاحة  $t$

وحيث أن  $(C)$  شلجم رأسه  $O(0; 0)$  و محور تماثله

محور الأرتاب فان  $(C_f)$  شلجم رأسه  $O'(1; -5)$

أي  $O'(1; -5)$  و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة  $x = 1$

و حيث أن الدالة  $x \rightarrow 2x^2$  تزايدية على  $[0; +\infty[$

و تناقصية على  $]-\infty; 0]$  فان الدالة  $f$  تزايدية على

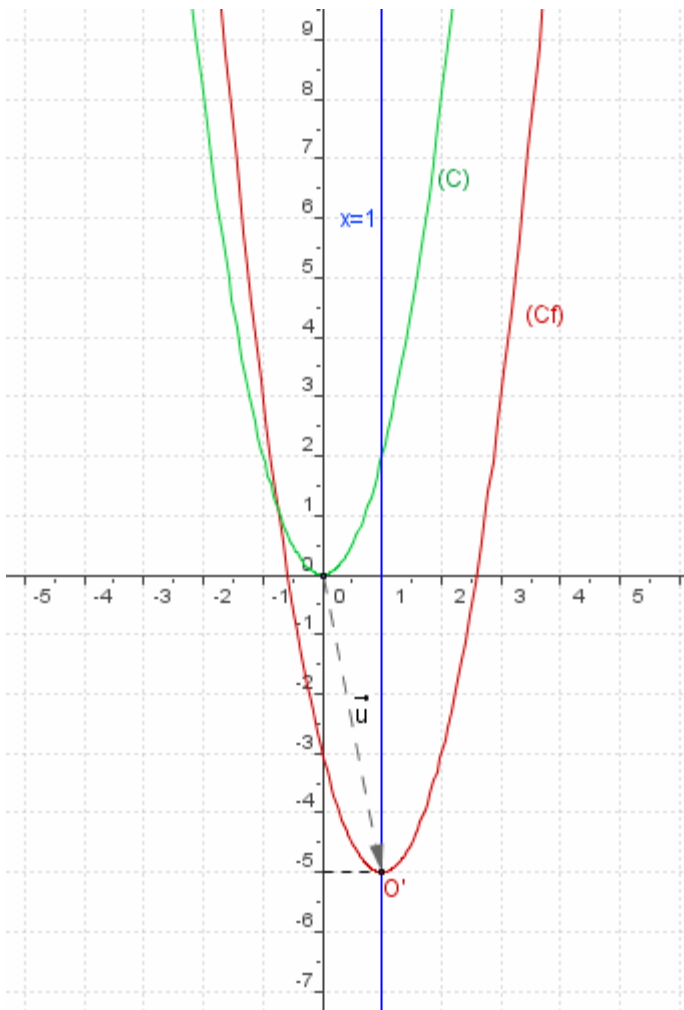
$[1; +\infty[$  و تناقصية على  $]-\infty; 1]$

جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f$	$\swarrow$ -5 $\searrow$		

إنشاء المنحنى

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-5	-3	3



**مثال 2** لندرس  $f$  حيث  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

الشكل القانوني لـ  $f(x)$  هو  $f(x) = -(x-1)^2 + 4$

معادلة  $C_f$  في المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  هي  $y = -(x-1)^2 + 4$  أي  $y - 4 = -(x-1)^2$

نعتبر  $t$  الإزاحة ذات المتجهة  $\vec{u}(1; 4)$  ولتكن  $M(x; y)$  و  $M'(X; Y)$  نقطتين

ليكن  $(C)$  منحنى الدالة  $x \rightarrow -x^2$

لنبين أن  $C_f$  هو صورة  $(C)$  بالإزاحة  $t$

$$\begin{cases} X-1=x \\ Y-4=y \end{cases} \text{ تكافئ } t(M) = M'$$

$$y = -x^2 \text{ تكافئ } M(x; y) \in (C)$$

$$Y-4 = -(X-1)^2 \text{ تكافئ}$$

$$M'(X; Y) \in (C_f) \text{ تكافئ}$$

إذن  $(C_f)$  هو صورة  $(C)$  بالإزاحة  $t$

وحيث أن  $(C)$  شلجم رأسه  $O(0; 0)$  و محور

تماثله محور الارايب فان  $(C_f)$  شلجم رأسه

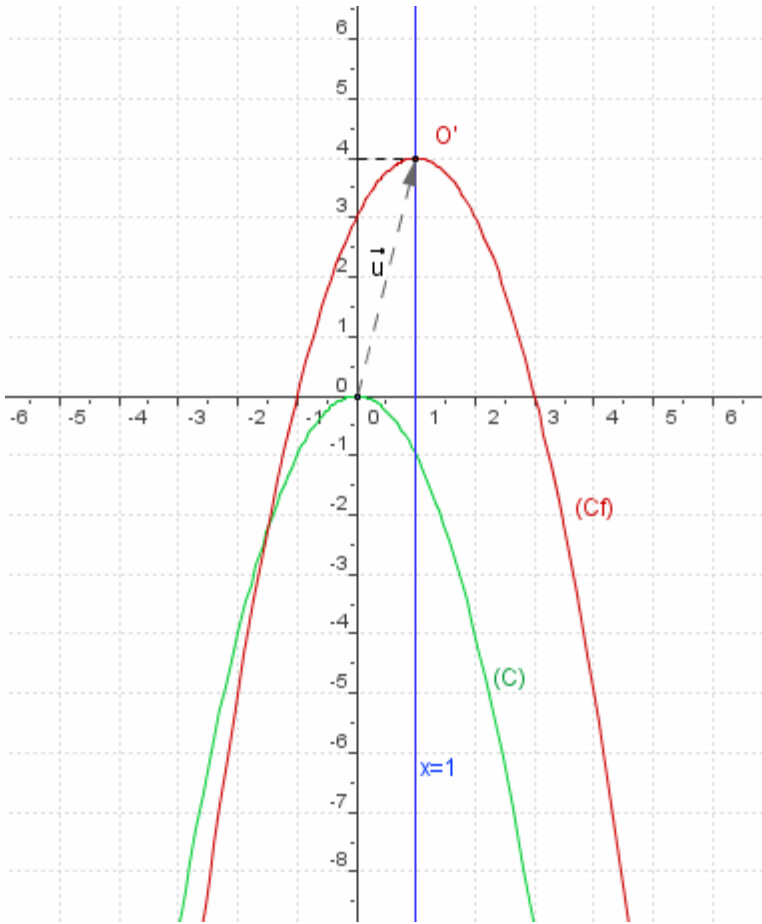
$t(O) = O'$  أي  $O'(1; 4)$  و محور تماثله المستقيم

ذالمعادلة  $x=1$

و حيث أن الدالة  $x \rightarrow -x^2$  تناقصية على  $[0; +\infty[$

و تزايدية على  $]-\infty; 0]$  فان الدالة  $f$  تناقصية على

$[1; +\infty[$  و تزايدية على  $]-\infty; 1]$



جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f$	$\swarrow$ 4 $\searrow$		

إنشاء المنحنى

$f(x) = 0$  تكافئ  $x = -1$  أو  $x = 3$

$x$	0	1	2	4
$f(x)$	3	4	3	-5

**الحالة العامة**  $x \rightarrow ax^2 + bx + c$  حيث  $a \neq 0$   
**نشاط**

لتكن  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = ax^2 + bx + c$  حيث  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  و  $a \neq 0$

1/ أعط الشكل القانوني لـ  $f$

2/ بين أن المنحنى  $(C_f)$  هو صورة المنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $x \rightarrow ax^2$  بالإزاحة  $t$  ذات المتجهة

$$(C_f) \text{ و استنتج طبيعة } \vec{u}\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد  $a$

## خاصيات

لتكن  $f$  دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = ax^2 + bx + c$  حيث  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  و  $a \neq 0$

\*  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  حيث  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  و  $\beta = f(\alpha)$  هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة  $f$

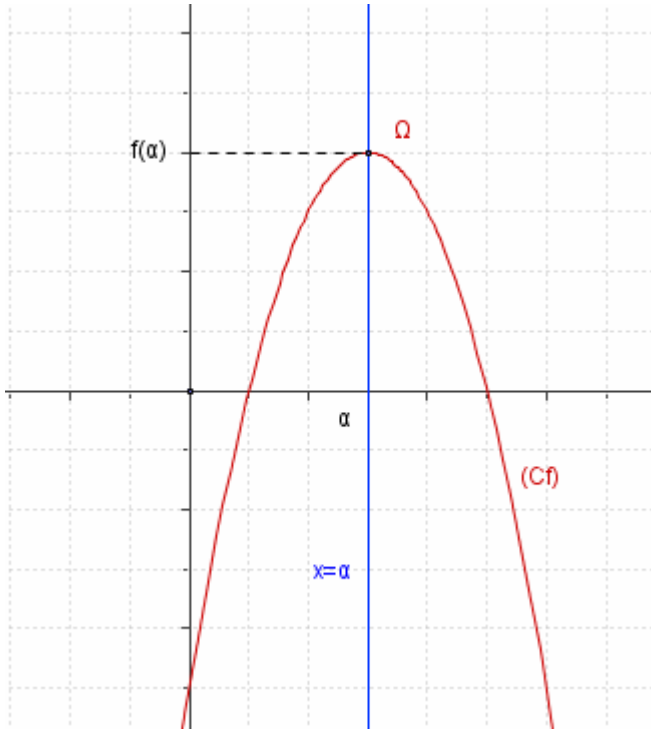
\* المنحنى  $C_f$  هو صورة المنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $x \rightarrow ax^2$  بالإزاحة ذا المتجهة  $\vec{u}(\alpha; \beta)$

\*  $C_f$  منحنى  $f$  في معلم متعامد هو شلجم رأسه  $\Omega(\alpha; \beta)$  و محور تماثله المستقيم  $x = \alpha$

$$\text{نضع } \alpha = \frac{-b}{2a}$$

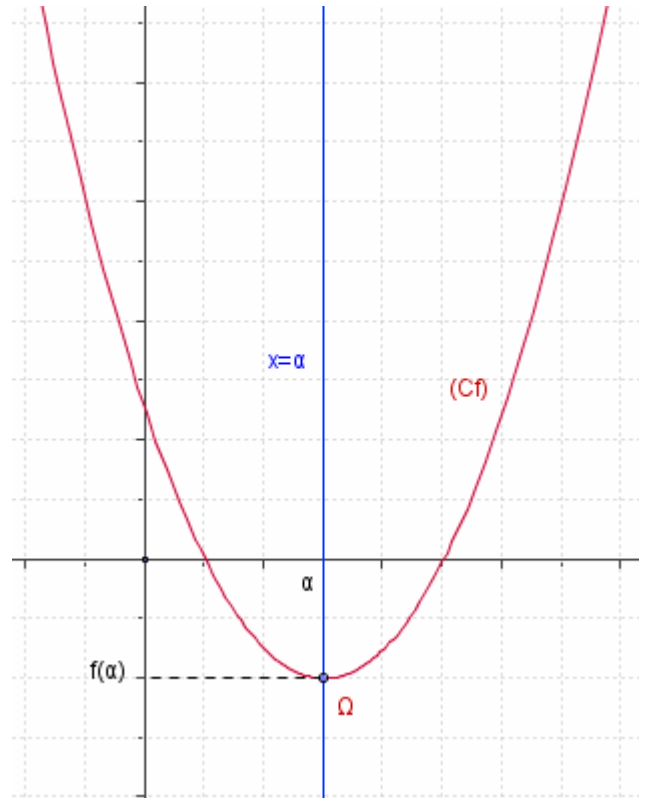
\* إذا كان  $a < 0$  فان:

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f$			



\* إذا كان  $a > 0$  فان:

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f$			



### 3- دراسة الدالة $x \rightarrow \frac{a}{x}$

أ- أمثلة

\* نعتبر الدالة  $f(x) = \frac{2}{x}$

- ندرس تغيرات  $f$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$f$  دالة فردية و منه اقتصار دراستها على  $]0; +\infty[$

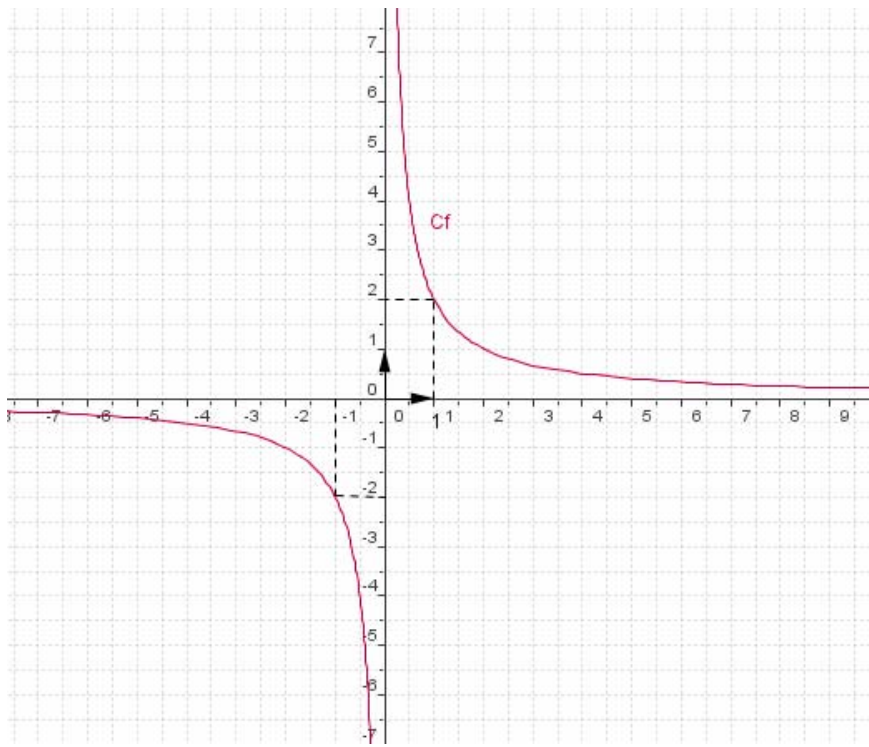
ليكن  $x$  و  $y$  من  $]0; +\infty[$  حيث  $x \neq y$

لكل  $x$  و  $y$  من  $]0; +\infty[$  حيث  $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-2}{xy}$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$$

إذن  $f$  تناقصية على  $]0; +\infty[$



$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	→		←

**ملاحظة**

إذا كان  $0 < x < 1$  فإن  $\frac{2}{x} > 2$

هذا يعني أن جزء  $C_f$  على  $]0; 1[$

فوق المستقيم  $(\Delta): y = 2$

إذا كان  $x \geq 1$  فإن  $0 < \frac{2}{x} \leq 2$

هذا يعني أن جزء  $C_f$  على  $]1; +\infty[$

تحت المستقيم  $(\Delta): y = 2$

جدول القيم

$x$	$\frac{1}{2}$	$1$	$2$	$4$
$f(x)$	$4$	$2$	$1$	$\frac{1}{2}$

$C_f$  هذلول مركزه  $O$  و مقاربه محورا المعلم

\* نعتبر الدالة  $f(x) = \frac{-1}{x}$

- ندرس تغيرات  $f$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$f$  دالة فردية و منه اقتصار دراستها على  $]0; +\infty[$

ليكن  $x$  و  $y$  من  $]0; +\infty[$  حيث  $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{1}{xy}$$

إذن  $f$  تزايدية على  $]0; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	→		→

$C_f$  هذلول مركزه  $O$  و مقاربه محورا المعلم

محورا المعلم

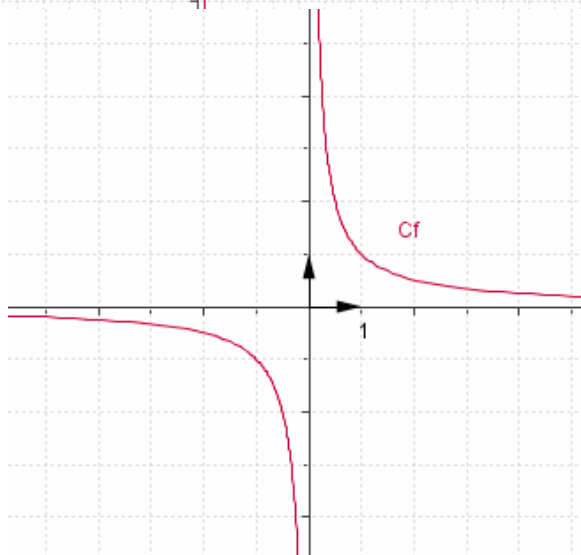
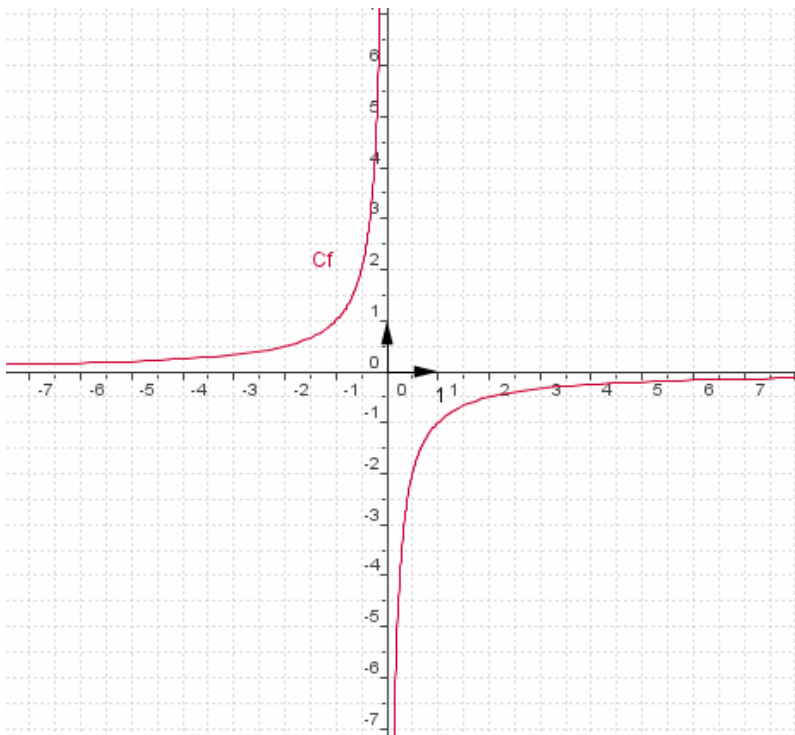
**ب- الحالة العامة**

نعتبر  $f(x) = \frac{a}{x}$

إذا كان  $a > 0$  فإن

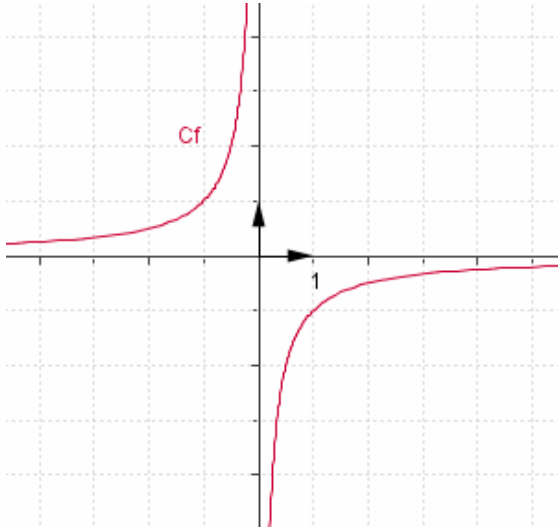
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f$	→		←

$C_f$  هذلول مركزه  $O$  و مقاربه محورا المعلم



إذا كان  $a < 0$  فان

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f$	↗		↘



$C_f$  هذلول مركزه  $O$  و مقارباة محورا المعلم

4 - دراسة الدالة  $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$  حيث  $c \neq 0$

مثال 1  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$  -\*

-\* بانجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

معادلة  $C_f$  في المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  هي

نعتبر  $t$  الإزاحة ذات المتجهة  $\vec{u}(1;2)$  و لتكن  $M(x;y)$  و  $M'(X;Y)$  نقطتين

ليكن  $(C)$  منحنى الدالة  $x \rightarrow \frac{3}{x}$

لنبين أن  $C_f$  هو صورة  $(C)$  بالإزاحة  $t$

$$\begin{cases} X-1 = x \\ Y-2 = y \end{cases} t(M) = M'$$

$M(x;y) \in (C)$  تكافئ  $y = \frac{3}{x}$  تكافئ  $Y-2 = \frac{3}{X-1}$  تكافئ  $M'(X;Y) \in (C_f)$

إذن  $(C_f)$  هو صورة  $(C)$  بالإزاحة  $t$

وحيث أن  $(C)$  هذلول مركزه  $O(0;0)$  و مقارباة محورا المعلم فان  $(C_f)$  هذلول مركزه

$t(O) = O'$  أي  $O'(1;2)$  و مقارباة المستقيمان اللذان معادلتهما  $x=1$  و  $y=2$

و حيث أن الدالة  $x \rightarrow \frac{3}{x}$  تناقصية على كل من  $]-\infty; 0[$  و  $]0; +\infty[$  فان الدالة  $f$  تناقصية على

كل من  $]-\infty; 1[$  و  $]1; +\infty[$

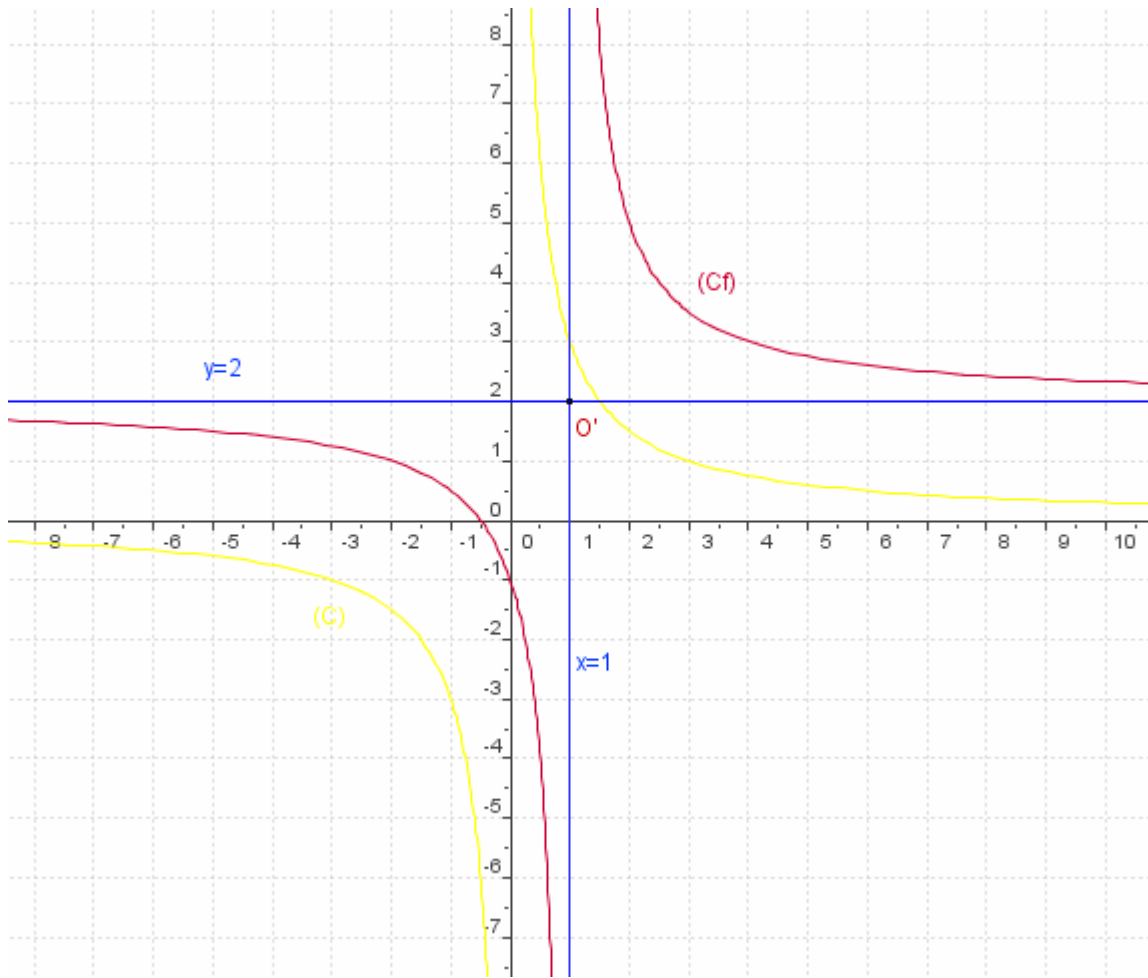
جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f$	↘		↘

إنشاء المنحنى

$f(x) = 0$  تكافئ  $x = -\frac{1}{2}$

$x$	0	1	2	5
$f(x)$	-1	//	5	$\frac{11}{4}$



**مثال 2**  $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$  \*

\*- بإيجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

$$f(x) = 2 + \frac{-1}{x+2}$$

معادلة  $C_f$  في المعلم المتعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  هي أي  $y - 2 = \frac{-1}{x+2}$   $y = 2 + \frac{-1}{x+2}$

نعتبر  $t$  الإزاحة ذات المتجهة  $\vec{u}(-2; 2)$  ولتكن  $M(x; y)$  و  $M'(X; Y)$  نقطتين

ليكن  $(C)$  منحنى الدالة  $x \rightarrow \frac{-1}{x}$

لنبين أن  $C_f$  هو صورة  $(C)$  بالإزاحة  $t$

$$\begin{cases} X+2 = x \\ Y-2 = y \end{cases} \quad t(M) = M' \text{ تكافئ}$$

$$M'(X; Y) \in (C_f) \text{ تكافئ } Y-2 = \frac{-1}{X+2} \text{ تكافئ } y = \frac{3}{x} \text{ تكافئ } M(x; y) \in (C)$$

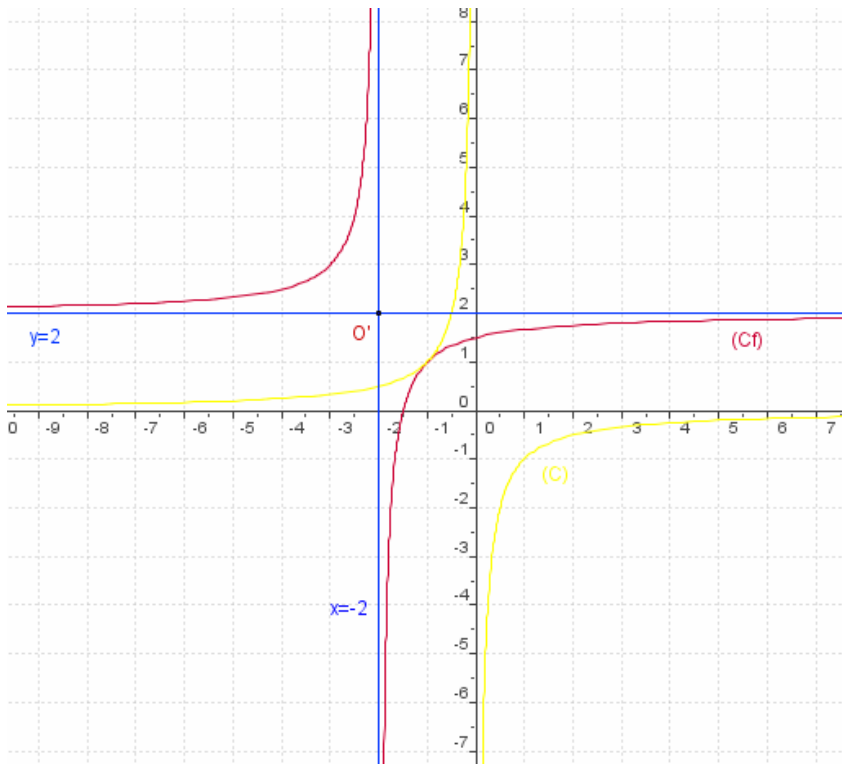
إذن  $(C_f)$  هو صورة  $(C)$  بالإزاحة  $t$

وحيث أن  $(C)$  هذلول مركزه  $O(0; 0)$  ومقاربه محورا المعلم فان  $(C_f)$  هذلول مركزه

$t(O) = O'(-2; 2)$  ومقاربه المستقيمان اللذان معادلتهم  $x = -2$  و  $y = 2$

وحيث أن الدالة  $x \rightarrow \frac{-1}{x}$  تزايدية على كل من  $]-\infty; 0[$  و  $]0; +\infty[$  فان الدالة  $f$  تزايدية على

كل من  $]-\infty; -2[$  و  $]-\infty; -2[$



### جدول التغيرات

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f$			

### إنشاء المنحنى

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } x = -\frac{3}{2}$$

$x$	$-3$	$-2$	$-1$	$0$	$2$
$f(x)$	$1$	//	$1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$

الحالة العامة  $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$  حيث  $c \neq 0$

### نشاط

لتكن  $f$  الدالة المتخاطبة المعرفة على  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$  حيث  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  و  $c \neq 0$  و  $ad - bc \neq 0$

1- حدد  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\lambda$  حيث  $f(x) = \beta + \frac{\lambda}{x-\alpha}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

2- بين أن المنحنى  $(C_f)$  هو صورة المنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $x \rightarrow \frac{\lambda}{x}$  بالإزاحة  $t$  ذات المتجهة  $\vec{u}(\alpha; \beta)$

و استنتج طبيعة  $(C_f)$

3- بين أن تغيرات  $f$  مرتبطة بالعدد  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

### خاصيات

لتكن  $f$  الدالة المتخاطبة المعرفة على  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$  حيث  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  و  $c \neq 0$  و  $ad - bc \neq 0$

\* توجد أعداد حقيقية  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\lambda$  حيث  $f(x) = \beta + \frac{\lambda}{x-\alpha}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

\* المنحنى  $C_f$  هو صورة المنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $x \rightarrow \frac{\lambda}{x}$  بالإزاحة ذات المتجهة  $\vec{u}(\alpha; \beta)$

\*  $C_f$  منحنى  $f$  في معلم متعامد هو هذلول مركزه  $\Omega(\alpha; \beta)$  و مقارباها هما المستقيمان المعرفان بـ

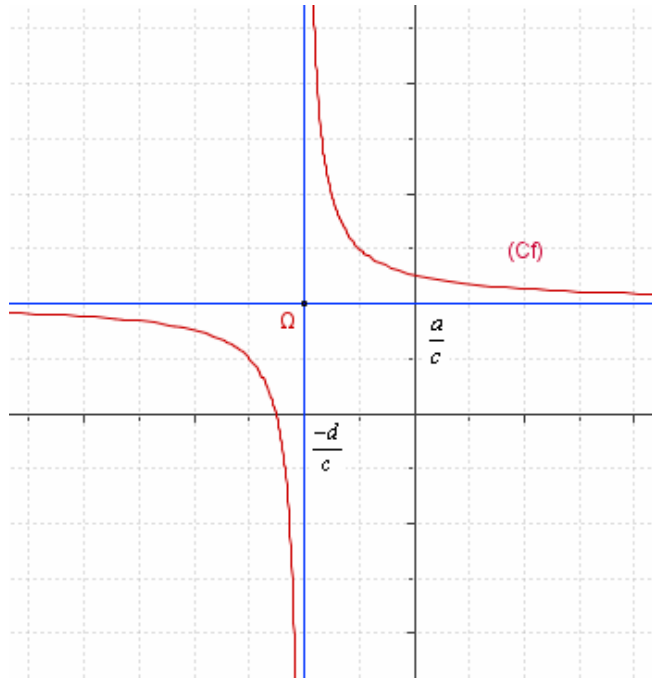
$$y = \beta \text{ و } x = \alpha$$

ملاحظة:  $\beta = \frac{a}{c}$  و  $\alpha = \frac{-d}{c}$



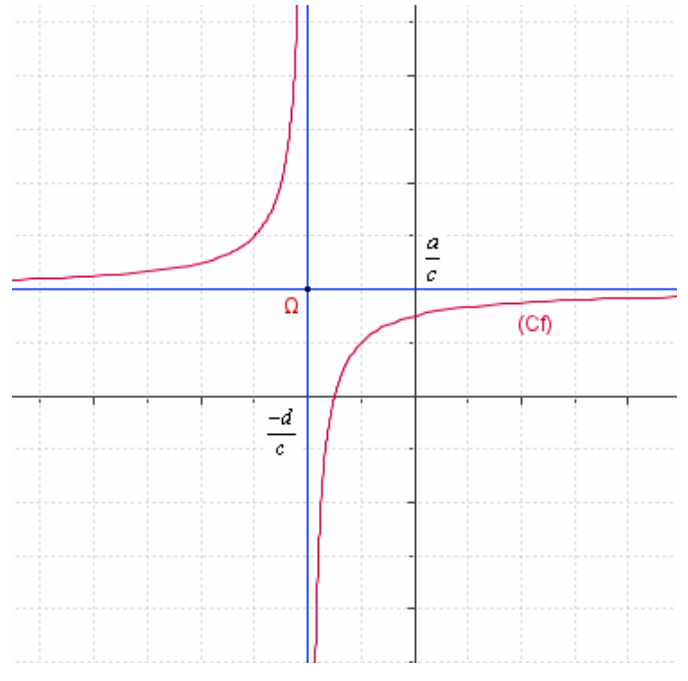
\*- إذا كان  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$  فان

$x$	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f$			



\*- إذا كان  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$  فان

$x$	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f$			



### 5- دالة الجيب sin - دالة جيب التمام cos أ / دالة الجيب sin تعريف

الدالة  $\sin us$  هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي  $x$  بجيبه  $\sin x$   
نكتب  $\sin : x \rightarrow \sin x$

#### خاصية 1

لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $\sin(-x) = -\sin x$  نقول ان الدالة  $\sin$  فردية

\* رأينا أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و لكل  $k$  من  $\mathbb{Z}$   $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$

ومنه  $\sin x = \sin(x + 2\pi)$

#### خاصية 2

لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $\sin x = \sin(x + 2\pi)$  نقول ان الدالة  $\sin$  دورية و  $2\pi$  دور لها

#### التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن  $M(x; \sin x)$  نقطة من المنحنى  $(C_{\sin})$

و حيث  $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$  فان  $M'(x + 2k\pi; \sin x)$  نقطة من المنحنى  $(C_{\sin})$

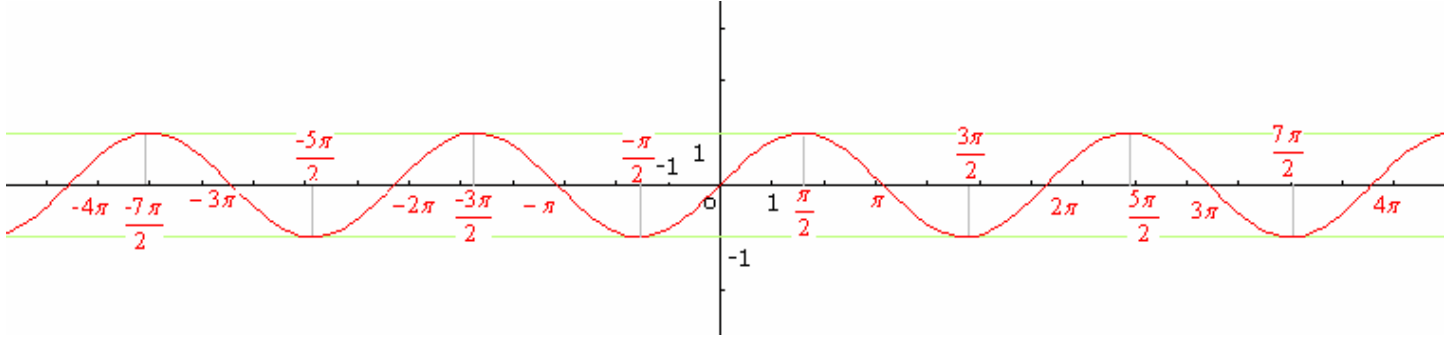
و بالتالي  $\overline{MM'} = 2k\pi \vec{i}$  أي صورة  $M$  بالإزاحة ذات المتجهة  $2k\pi \vec{i}$

و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى على مجال سعته  $2\pi$  مثلا  $]-\pi; \pi]$  و استنتاج ما تبقى من المنحنى

في المجالات  $]-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$  باستعمال الإزاحة ذات المتجهة  $2k\pi \vec{i}$

## ملاحظة

$\sin$  فردية و منه المنحنى متماثل بالنسبة لأصل المعلم  
يكفي تمثيل المنحنى  $(C_{\sin})$  على  $[0; \pi]$  و استنتاج المنحنى  $(C_{\sin})$  على  $[-\pi; 0]$   
التمثيل المبياني لدالة  $\sin$



## ب / دالة جيب التمام $\cos$

### تعريف

الدالة  $\cos$  هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي  $x$  بجيب تمامه  $\cos x$   
نكتب  $\cos : x \rightarrow \cos x$

### خاصية 1

لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $\cos(-x) = \cos x$  نقول إن الدالة  $\cos$  زوجية

\* رأينا أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و لكل  $k$  من  $\mathbb{Z}$   $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$

ومنه  $\cos x = \cos(x + 2\pi)$

### خاصية 2

لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $\cos x = \cos(x + 2\pi)$  نقول إن الدالة  $\cos$  دورية و دورتها  $2\pi$

## التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

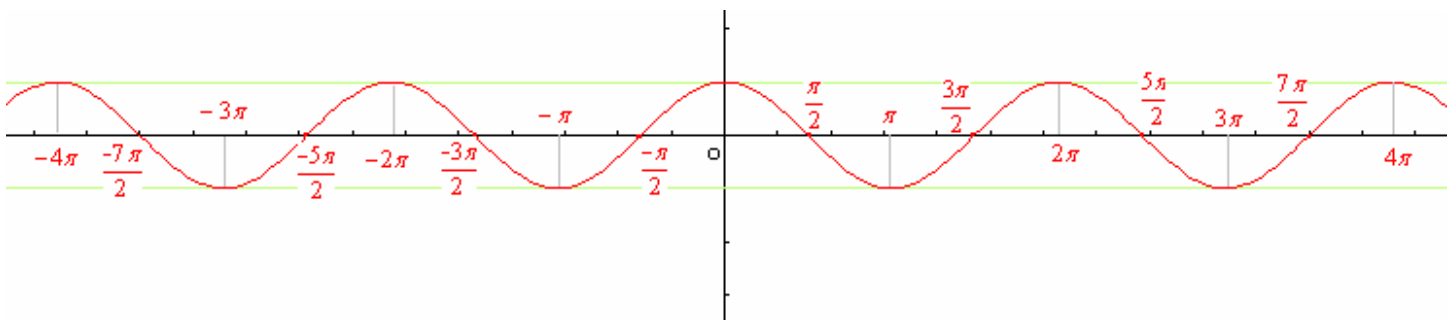
لتكن  $M(x; \cos x)$  نقطة من المنحنى  $(C_{\cos})$

و حيث  $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$  فان  $M'(x + 2k\pi; \sin x)$  نقطة من المنحنى  $(C_{\cos})$

و بالتالي  $\overline{MM'} = 2k\pi \vec{i}$  أي صورة  $M$  بالإزاحة ذات المتجهة  $2k\pi \vec{i}$   
و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى  $(C_{\cos})$  على مجال سعته  $2\pi$  مثلا  $[-\pi; \pi]$  و استنتاج ما تبقى من المنحنى في المجالات  $[-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$  باستعمال الإزاحة ذات المتجهة  $2k\pi \vec{i}$

## ملاحظة

$\cos$  زوجية و منه المنحنى  $(C_{\cos})$  متماثل بالنسبة لمحور الارايب  
يكفي تمثيل المنحنى  $(C_{\cos})$  على  $[0; \pi]$  و استنتاج المنحنى  $(C_{\cos})$  على  $[-\pi; 0]$   
التمثيل المبياني لدالة  $\cos$



## تمارين و حلول

### تمرين 1

نعتبر  $f$  و  $g$  دالتين عدديتين لمتغير حقيقي حيث  $f(x) = x^2 - 2x$  ;  $g(x) = \frac{-2x-1}{-2x+1}$

- 1 - حدد مجموعة تعريف الدالة  $g$
- 2 - أعط جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين  $f$  و  $g$
- 3 - أ) أنقل الجدول التالي و أتممه

$x$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$					
$g(x)$					

ب) حدد تقاطع  $C_f$  و محور الافاصل

ج) أنشئ المنحنيين  $C_f$  و  $C_g$  في نفس المعلم المتعامد الممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

الجواب

$$f(x) = x^2 - 2x \quad ; \quad g(x) = \frac{-2x-1}{-2x+1}$$

1 - نحدد مجموعة تعريف الدالة  $g$

ليكن  $x \in \mathbb{R}$  تكافئ  $-2x+1 \neq 0$  إذن  $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

2 - نعطي جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين  $f$  و  $g$

جدول تعبيرات  $f$   $a=1$   $\frac{-b}{2a}=1$

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f$			

جدول تغيرات  $g$  لدينا  $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g$			

3 - أ) - نتمم الجدول

$x$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

ب) نحدد تقاطع  $C_f$  و محور الافاصل

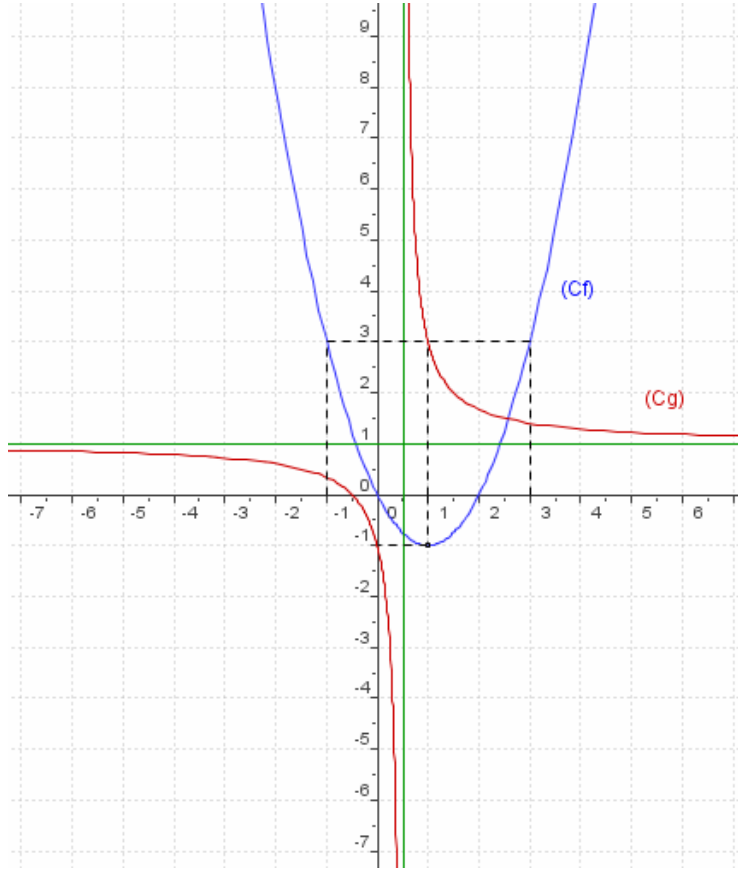
ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

إذن  $C_f$  يقطع محور الافاصل في النقطتين ذات الافصولين 0 و 2 على التوالي

ج) إنشاء المنحنيين  $C_f$  و  $C_g$  في نفس المعلم المتعامد الممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$



## تمرين 2

لتكن  $f$  و  $g$  الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفتين بـ

$$g(x) = x^2 - 3|x| \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

ولیکن  $C_f$  و  $C_g$  منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أ- حدد  $D_f$

ب- أحسب  $f(2)$  و  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $g(2)$  و  $g(4)$

2- أعط جدول تغيرات  $f$

3- أ- أدرس زوجية  $g$

ب- بين أن  $g$  تناقصية على  $\left[0; \frac{3}{2}\right]$  و تزايدية على  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$

د- أعط جدول تغيرات  $g$  على  $\mathbb{R}$

4- حدد تقاطع  $C_g$  و محور الأفاصيل

5- أ- أنشئ  $C_f$  و  $C_g$

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة  $f(x) = g(x)$

ج- حل مبيانيا المتراجحة  $x^2 - 3|x| \geq 0$

الجواب

$$g(x) = x^2 - 3|x| \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

2- أ- نحدد  $D_f$

لتكن  $x \in \mathbb{R}$   
 $x-1 \neq 0$  تكافئ  $x \in D_f$

تكافئ  $x \neq 1$   
 إذن  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ب- نحسب  $f(2)$  و  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $g(2)$  و  $g(4)$

$$g(4) = 16 - 12 = 4 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad g(2) = 4 - 6 = -2 \quad ; \quad f(2) = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

2- نحدد تغيرات  $f$

لدينا  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$  ومنه  $f$  تناقصية على كل من  $]1; +\infty[$  و  $]-\infty; 1[$

جدول تغيرات  $f$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f$	↘		↘

3- أ- ندرس زوجية  $g$

لكل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا  $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = (-x)^2 - 3|-x| = x^2 - 3|x| = g(x)$$

$g$  دالة زوجية

ب- بين أن  $g$  تناقصية على  $\left]0; \frac{3}{2}\right[$  و تزايدية على  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

لدينا  $g(x) = x^2 - 3x$  لكل  $x$  من  $]0; +\infty[$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} \quad c=0 \quad b=-3 \quad a=1$$

معامل  $x^2$  هو العدد الموجب 1 ومنه الدالة  $x \rightarrow x^2 - 3x$  تزايدية  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$  و تناقصية على  $]-\infty; \frac{3}{2}]$

إذن  $g$  تناقصية على  $\left]0; \frac{3}{2}\right[$  و تزايدية على  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

د- نعطي جدول تغيرات  $g$  على  $\mathbb{R}$

لدينا  $g$  تناقصية على  $\left]0; \frac{3}{2}\right[$  و تزايدية على  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

و حيث أن  $g$  زوجية فان  $g$  تزايدية على  $\left]0; -\frac{3}{2}\right[$  و تناقصية على  $]-\infty; -\frac{3}{2}]$

جدول تغيرات  $g$

$x$	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$0$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g$	↘		↗	↘	↗
		$\frac{9}{4}$	$0$	$\frac{9}{4}$	

4- نحدد تقاطع  $C_g$  و محور الأفاصيل

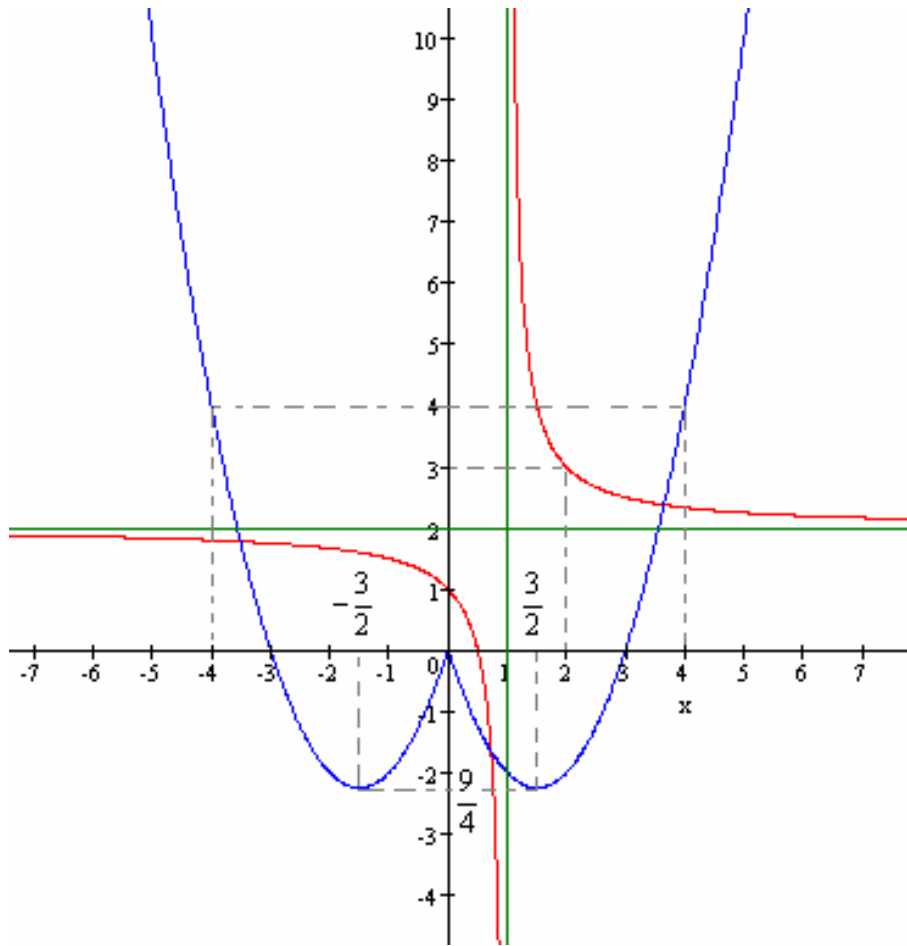
بما أن  $g$  زوجية فانه يكفي تحديد تقاطع  $C_g$  و محور الأفاصيل على  $\mathbb{R}^+$  و استنتاج التقاطع على  $\mathbb{R}^-$

$$x^2 - 3x = 0 \quad \text{تكافئ} \quad g(x) = 0 \quad \text{ليكن} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$x = 3 \quad \text{أو} \quad x = 0 \quad \text{تكافئ}$$

إذن  $C_g$  و محور الأفاصيل يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 3 و -3 على التوالي

5- أ- ننشئ  $C_f$  و  $C_g$



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة  $f(x) = g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن  $C_f$  و  $C_g$  يتقاطعان في ثلاث نقط

ومنه للمعادلة  $f(x) = g(x)$  ثلاثة حلول

ج - نحل مبيانيا المتراجحة  $x^2 - 3|x| \geq 0$

$x^2 - 3|x| \geq 0$  تكافئ  $g(x) \geq 0$  تكافئ  $C_g$  فوق محور الأفاصيل

من خلال التمثيل المبياني يتضح أن  $C_g$  فوق محور الأفاصيل أو ينطبقان في  $\{0\} \cup [3; +\infty[ \cup ]-\infty; -3]$

إذن  $S = ]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[ \cup \{0\}$

### تمرين 3

لتكن  $f$  و  $g$  الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفتين بـ

$$g(x) = \frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

$$f(x) = x^2 - x$$

وليكن  $C_f$  و  $C_g$  منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

3- أ- حدد  $D_g$

ب- أحسب  $f(2)$  و  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $g(2)$  و  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $g(0)$

2- أ- أعط جدول تغيرات  $f$

ب- حدد طبيعته المنحنى  $C_f$

3- أ- بين أن  $g$  دالة زوجية

ب- حدد تغيرات  $g$  و أعط جدول تغيراتها

4-أ- أنشئ  $C_f$  و  $C_g$

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة  $f(x) = g(x)$

الجواب

$$g(x) = \frac{2|x|-1}{|x|-1} \quad f(x) = x^2 - x$$

4-أ- نحدد  $D_g$

ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_g \text{ تكافئ } |x|-1 \neq 0$$

$$|x| \neq 1$$

$$x \neq 1 \text{ و } x \neq -1$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1; -1\}$$

ب- نحسب  $f(2)$  و  $g(2)$  و  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $f(0)$  و  $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$g(2) = \frac{2 \times 2 - 1}{2 - 1} = 3 \quad ; \quad f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 0 \quad ; \quad g(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{0 - 1} = 1 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

2-أ- نعطي جدول تغيرات  $f$

$$\text{لدينا } f(x) = x^2 - x \text{ أي } a=1 \text{ و } \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$$

ومنه جدول تغيرات  $f$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f$	←		→

ب- حدد طبيعته المنحنى  $C_f$

$$C_f \text{ شلجم رأسه } A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right) \text{ و محور تماثلة المستقيم ذا المعادلة } x = \frac{1}{2}$$

3-أ- نبين أن دالة زوجية

$$\text{لكل } x \in \mathbb{R} - \{1; -1\} \text{ لدينا } -x \in \mathbb{R} - \{1; -1\}$$

$$g(-x) = \frac{2|-x|-1}{|-x|-1} = \frac{2|x|-1}{|x|-1} = g(x) \quad \text{ليكن } x \in \mathbb{R} - \{1; -1\}$$

إذن  $g$  دالة زوجية

ب- نحدد تغيرات  $g$  و نعطي جدول تغيراتها

$$g(x) = \frac{2x-1}{x-1} \text{ ومنه } |x|=x \quad : \quad [0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \text{ لكل } x \text{ من}$$

$$\text{وحيث } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0 \text{ فان } g \text{ تناقصية على كل من } ]1; +\infty[ \text{ و } ]0; 1[$$

و بما أن  $g$  دالة زوجية فان  $g$  تزايدية على كل من  $] -\infty; -1[$  و  $] -1; 0[$

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$g$	↗		↘	↘	↘

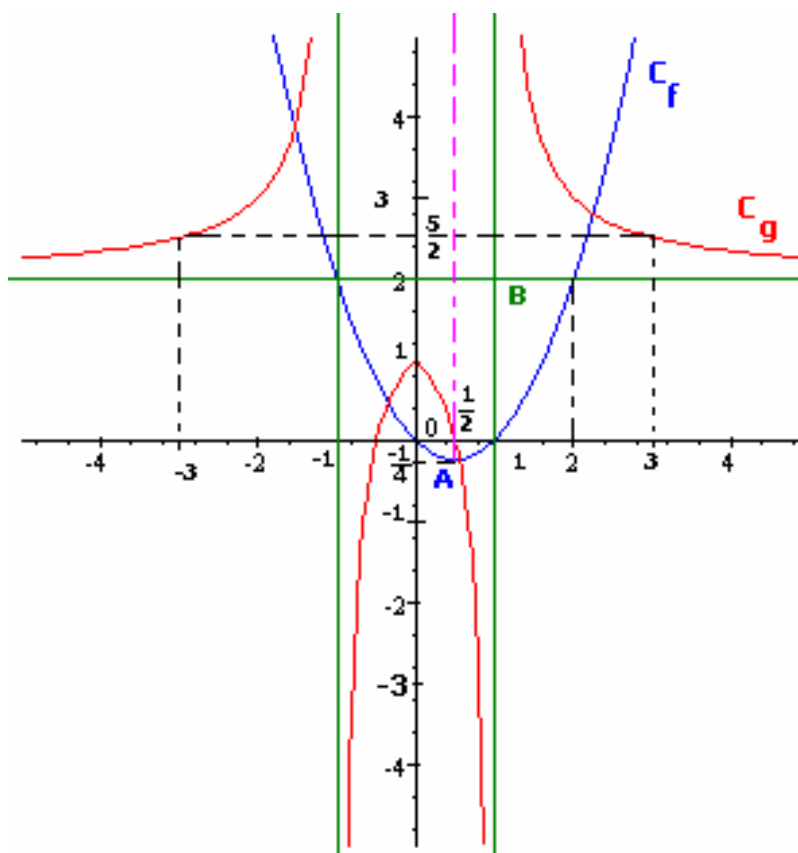
4-أ- ننشئ  $C_g$  و  $C_f$

بما أن  $g$  زوجية فان  $C_g$  متماثل بالنسبة لمحور الأرتاب

جزئ منحنى  $C_g$  على  $[0;1[ \cup ]1;+\infty[$  هو جزئ من هذلول مركزه  $B(1;2)$  ومقاربا

$$(\Delta_1): y=2 \quad (\Delta_2): x=1$$

$$C_f \text{ شلجم رأسه } A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة  $f(x) = g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن  $C_g$  و  $C_f$

يتقاطعان في أربع نقط

ومنه المعادلة  $f(x) = g(x)$  تقبل أربعة حلول