# عموميات حول الدوال العددية

## I- الدالة – تساوى دالتين – التمثل المباني لدالة

### 1/ تعريف دالة – مجموعة تعريف دالة

نشاط

حدد مجموعة تعريف الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ في الحالات التالية

$f(x)=\dfrac{5}{4-x}$ (a ; $f(x)=\sqrt{2x+1}$ (b

$f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$ (c ; $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{3-x}}$ (d

الحل

(a $f(x)=\dfrac{5}{4-x}$

لتكن $x\in\mathbb{R}$

$x\in D_f$ تكافئ $4-x\neq 0$

تكافئ $x\neq 4$

اذن $D_f=\mathbb{R}-\{4\}$

(b $f(x)=\sqrt{2x+1}$

$x\in D_f$ تكافئ $2x+1\succ 0$

تكافئ $x\geq -\dfrac{1}{2}$

اذن $D_f=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

(c $f(x)=\dfrac{3x^2-2}{x^2+2x-3}$ ;

$x\in D_f$ تكافئ $x^2+2x-3\neq 0$

ليكن $\Delta$ مميز ثلاثية الحدود $x^2+2x-3$

$\Delta=4+12=16$

و منه لـ $x^2+2x-3$ جرين هما $x_1=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2}=1$ و $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2}=-3$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-3;1\}$

تعريف

نقول اننا عرفنا دالة عددية لمتغير حقيقي $f$ اذا ربطنا كل عدد من $\mathbb{R}$ على الاكثر بعدد حقيقي نرمز له بـ $f(x)$.

$f(x)$ تقرأ صورة $x$ بالدالة $f$ أو باختصار $f$ لـ $x$

تعريف

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي .

مجموعة تعريف الدالة $f$ هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية التي تقبل صورة بالدالة $f$ نرمز لها بـ $D_f$

### 2- تساوي دالتين

نشاط

قارن الدالتين العدديتين $f$ و $g$ لمتغير حقيقي في الحالتين التاليتين

$(a$ $\qquad g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ ; $f(x)=x-1$

$(b$ $\qquad g(x)=\dfrac{2}{x(x+2)}$ ; $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}$

a/ لدينا $D_f=\mathbb{R}$ و $D_g=\mathbb{R}-\{1\}$

ومنه $D_f\neq D_g$ اذن $f\neq g$

b/ لدينا $D_g=D_f=\mathbb{R}^*-\{2\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}^*-\{2\}$

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x}{x(x+2)}=\frac{2}{x(x+2)}=g(\ )$$

إذن $f=g$

**تعريف**

لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين لمتغير حقيقي

تكون $f$ و $g$ متساويتين اذا وفقط اذا كان لهما نفس مجموعة التعريف $D$ و لكل $x$ من $D$

$f(x)=g(x)$

## 3- التمثيل المبياني لدالة

**نشاط**

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ حيث $\qquad f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x|-2}$

أ- حدد $D_f$

ب - حدد أرتوبي $A$ و $B$ نقطتين من المنحنى $C_f$ أفصوليهما على التوالي 0 و 3

ج- هل النقط $C(2;0)$ ; $D(-4;6)$ ; $E(4;-6)$ تنتمي إلى $C_f$

د – أكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة ثم أنشئ المنحنى $C_f$ في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

**الحل**

أ- نحدد $D_f$

$x\in D_f$ تكافئ $|x|-2\neq 0$

تكافئ $|x|\neq 2$

تكافئ $x\neq 2$ أو $x=-2$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

ب - نحدد أرتوبي $A$ و $B$ نقطتين من المنحنى $C_f$ أفصوليهما على التوالي 0 و 3

لدينا $f(0)=\dfrac{-4}{-2}=2$ و منه $A(0;2)\in C_f$

لدينا $f(3)=\dfrac{9-4}{3-2}=5$ و منه $B(3;5)\in C_f$

ج- هل النقط $C(2;0)$ ; $D(-4;6)$ ; $E(4;-6)$ تنتمي إلى $C_f$

لدينا $2\notin\mathbb{R}-\{-2;2\}$ ومنه $C(2;0)\in C_f$

لدينا $f(-4)=\dfrac{16-4}{4-2}=6$ و منه $D(-4;6)\in C_f$

لدينا $f(4)=\dfrac{16-4}{4-2}=6$ و منه $E(4;-6)\notin C_f$

د – نكتب $f(x)$ بدون رمز للقيمة المطلقة

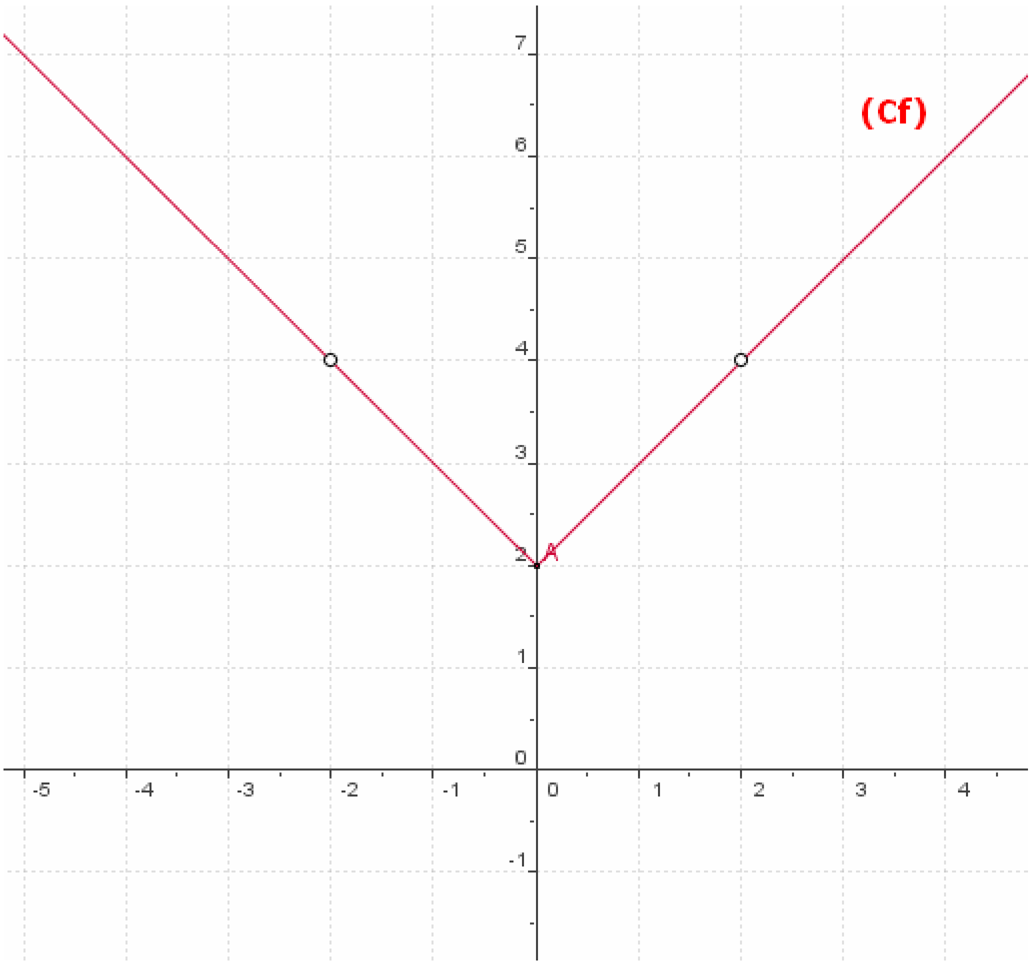
لدينا إذا كان $x\in[0;2[\cup]2;+\infty[$ فان $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$

إذا كان $x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ فان $f(x)=\frac{x^2-4}{|x|-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{-x-2}=-x+2$

ننشئ المنحنى $C_f$

معادلة جزء $C_f$ على $[0;2[\cup]2;+\infty[$ هي $y=x+2$ و منه $C_f$ نصع مستقيم أصله النقطة $A(0;2)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2

معادلة جزء $C_f$ على $]-\infty;-2[\cup]-2;0]$ هي $y=-x+2$ و منه $C_f$ نصع مستقيم أصله النقطة $A(0;2)$ محروم من النقطة ذات الأفصول 2 -




<u>تعريف</u>

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي .

التمثيل المبياني للدالة $f$ ( أو منحنى الدالة $f$ ) هو مجموعة النقط $M(x;f(x))$ حيث $x\in D_f$ نرمز لها بالرمز $C_f$ $\quad C_f=\{M(x;f(x))/x\in D_f\}$

<u>ملاحظة</u>

$M(x;y)\in C_f$ تكافئ $y=f(x)$ و $x\in D_f$

العلاقة $y=f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى $C_f$

## II - زوجية دالة

### 1- الدالة الزوجة

#### أ- تعريف

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و $D_f$ حيز تعريفها
نقول ان $f$ دالة زوجية اذا تحقق الشرطان التاليان :
* لكل $x$ من $D_f$ $\quad -x \in D_f$
* لكل $x$ من $D_f$ $\quad f(-x) = f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية $f$ زوجية في الحالات التالية

$f(x) = |x| - \dfrac{1}{x^2}$ (a ; $f(x) = x^3 + 1$ (b

(c $\begin{cases} f(x) = 2x & 0 \le x \prec 4 \\ f(x) = -2x & x \prec 0 \end{cases}$

a/ $f(x) = |x| - \dfrac{1}{x^2}$

$D_f = \mathbb{R}^*$

لدينا لكل $x \in \mathbb{R}^*$ $\quad -x \in \mathbb{R}^*$

لتكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = |-x| - \frac{1}{(-x)^2} = |x| - \frac{1}{x^2} = f(x)$$

إذن $f$ دالة زوجية

b/ $f(x) = x^3 + 1$

$f(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad f(-1) = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$

ومنه $f(-1) \ne f(1)$

$f$ دالة غير زوجية

c/ $\begin{cases} f(x) = 2x & 0 \le x \prec 4 \\ f(x) = -2x & x \prec 0 \end{cases}$

$D_f = ]-\infty; 0[ \cup [0; 4[ = ]-\infty; 4[$

نلاحظ أن $-6 \in D_f$ و $6 \notin D_f$ اذن $f$ دالة غير زوجية

### ب التمثيل المبياني لدالة زوجة

$f$ دالة زوجية و $C_f$ منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن $M(x; f(x))$ من $C_f$ و $M'$ مماثلتها بالنسبة لمحور الأراتيب .

ومنه $M'(-x; f(x))$

و حيث أن $f$ زوجية فان $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$

ومنه $M'(-x; f(-x))$ و بالتالي $M' \in C_f$

اذن $C_f$ متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب

العكس

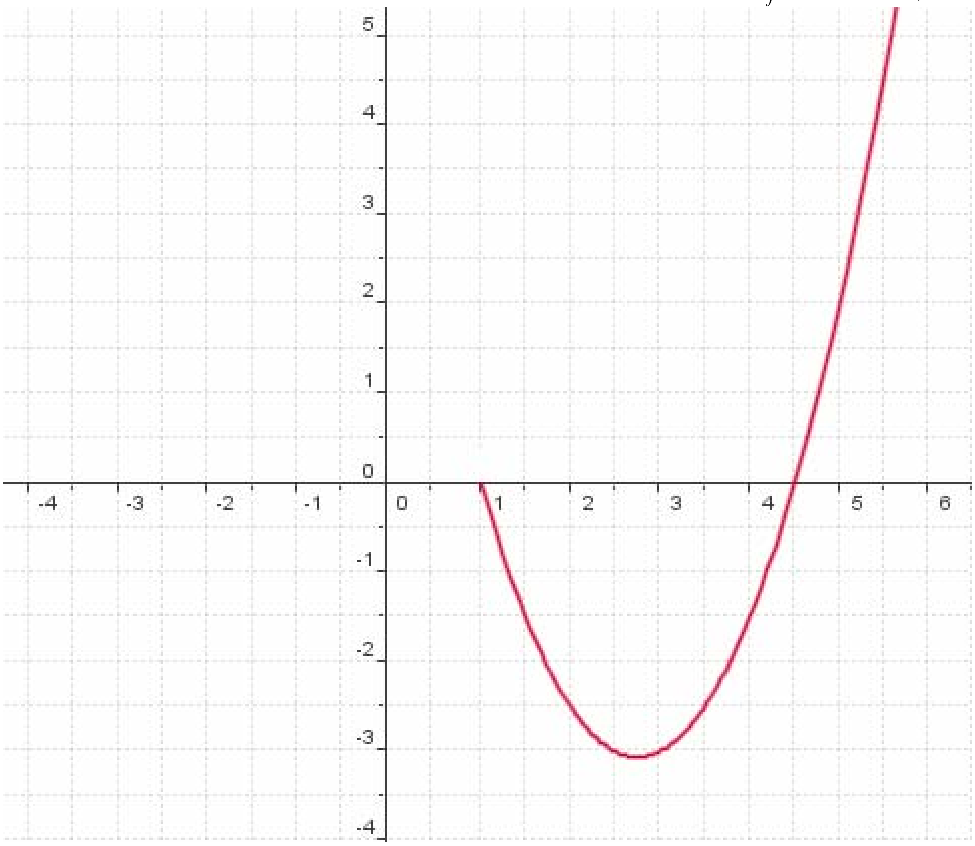
بين أنه إذا كان $C_f$ متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب فان $f$ دالة زوجية

خاصية

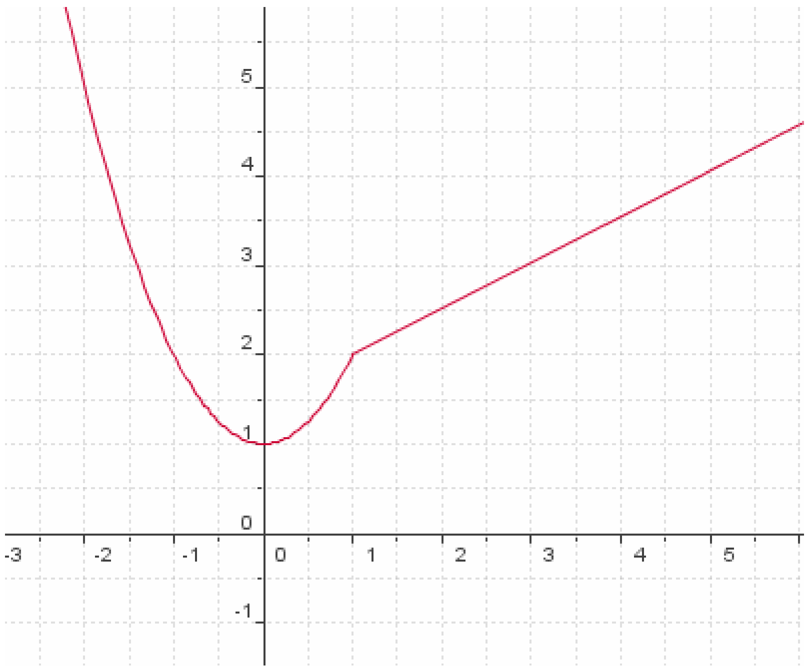
لتكن $f$ دالة عددية و $C_f$ منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$
تكون $f$ دالة زوجية إذا وفقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل للمنحنى $C_f$

تمرين

1- $f$ دالة زوجية أتمم المنحنى $C_f$




2- $f$ دالة عددية منحناها كما يلي




هل $f$ زوجية

2- دالة فردية

أ- تعريف

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و $D_f$ حيز تعريفها

نقول ان $f$ دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان :

* لكل $x$ من $D_f$ $\quad -x \in D_f$

* لكل $x$ من $D_f$ $\quad f(-x) = -f(x)$

تمرين

هل الدالة العددية $f$ فردية في الحالات التالية

$$f(x)=x^3+1 \quad (b \quad ; \quad f(x)=\frac{1}{x^3} \quad (a$$

$$\begin{cases} f(x)=-2x+1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & -2\le x\prec 0 \end{cases} \quad (c$$

/a $f(x)=\frac{1}{x^3}$

$D_f=\mathbb{R}^*$

لدينا لكل $x\in\mathbb{R}^*$ $\qquad -x\in\mathbb{R}^*$

لتكن $x\in\mathbb{R}^*$

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{1}{x^3}=-f(x)$$

إذن $f$ دالة فردية

/b $f(x)=x^3+1$

$f(1)=1^3+1=1+1=2 \qquad f(-1)=(-1)^3+1=-1+1=0$

ومنه $f(-1)\neq -f(1)$

$f$ دالة غير فردية

/c $\begin{cases} f(x)=-2x+1 & 0\le x\le 2 \\ f(x)=-2x-1 & -2\le x\prec 0 \end{cases}$

$D_f=[-2;0[\cup[0;2]=[-2;2]$

لدينا لكل $x\in[-2;2]$ و $-x\in[-2;2]$

إذا كان $x\in]0;2]$ فان $-x\in[-2;0[$

و بالتالي $f(x)=-2x+1$ و $f(-x)=-2(-x)-1=2x-1$ و منه $f(-x)=-f(x)$

إذا كان $x\in[-2;0[$ فان $-x\in]0;2]$

و بالتالي $f(x)=-2x-1$ و $f(-x)=-2(-x)+1=2x+1$ و منه $f(-x)=-f(x)$

إذن لكل $x\in[-2;2]$ $\qquad f(-x)=-f(x)$

إذن $f$ دالة فردية

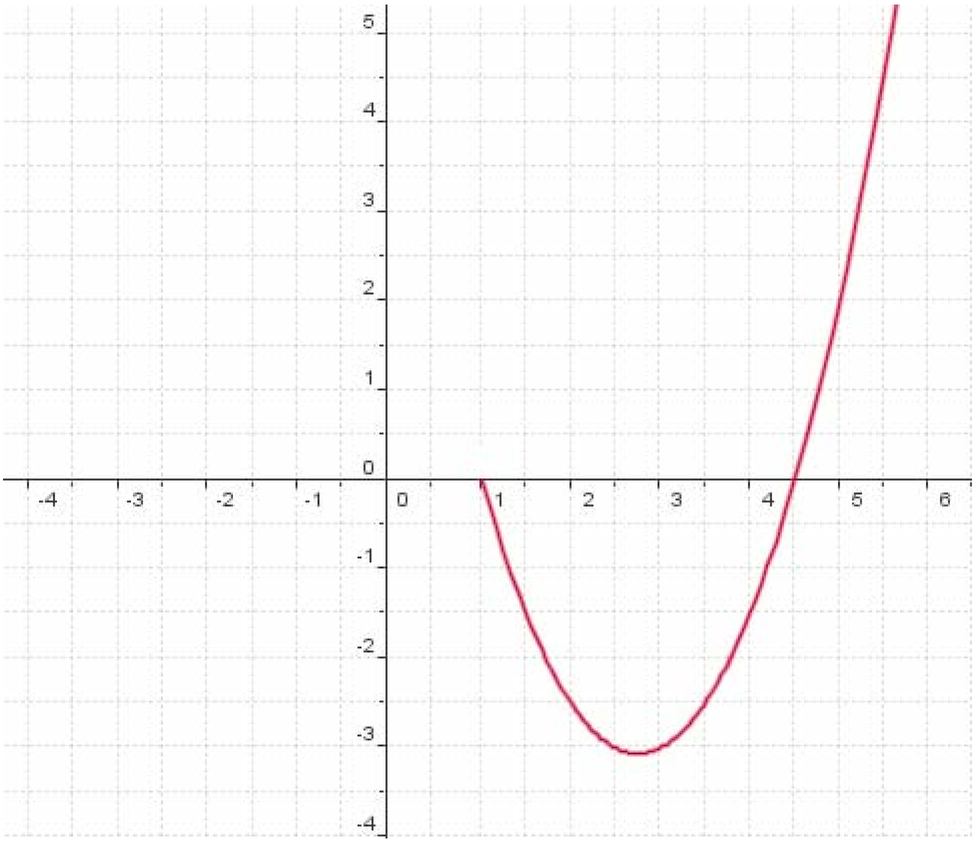
## ب-التمثيل المبياني لدالة فردية

خاصية

لتكن $f$ دالة عددية و $C_f$ منحناها في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$
تكون $f$ دالة فردية إذا وفقط إذا كان المنحنى $C_f$ متماثلا بالنسبة لأصل المعلم

تمرين

$f$ دالة فردية أتمم المنحنى $C_f$




تمرين

نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ حيث $f(x)=\frac{|x|+x^2}{x}$

حدد $D_f$ وبين أن $f$ فردية ثم أنشئ $C_f$

ملاحظة يمكن للدالة أن تكون غير فردية و غير زوجية

## III- تغيرات دالة

### 1- منحى تغيرات دالة

تعريف

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن $D_f$

- تكون $f$ تزايدية علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\leq f(x_2)$
- تكون $f$ تزايدية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\prec f(x_2)$
- تكون $f$ تناقصية علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\geq f(x_2)$
- تكون $f$ تناقصية قطعا علىI إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و$x_2$ منI إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\succ f(x_2)$

مثال أدرس تغيرات الدالة $f$ حيث $f(x)=-2x+1$

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$ حيث $a\prec b$

ومنه $-2a\succ -2b$ و بالتالي $-2a+1\succ -2b+1$ $f(a)\succ f(b)$

إذن $f$ تناقصية قطعا

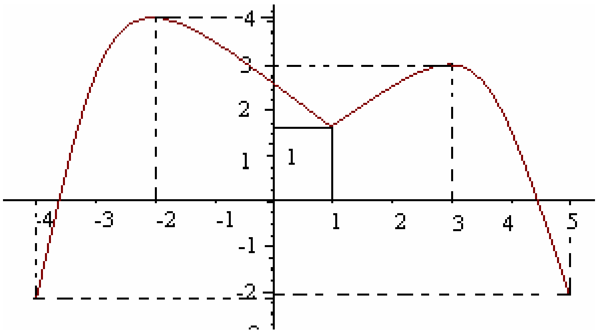
تمرين نعتبر $f(x)=|x-2|$

أدرس منحى تغيرات $f$ على كل من $]-\infty;2]$ و $[2;+\infty[$

أنشئ $C_f$

تمرين من خلال التمثيل المبياني للدالة $f$

على المجال $[-4;5]$ حدد تغيرات $f$




## 2- الدالة الرتيبة

**تعريف**

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن $D_f$

نقول ان $f$ رتيبة على I إذا و فقط إذا كان $f$ إما تزايدية على I و إما تناقصية على I.

**ملاحظات**

- يمكن لدالة أن تكون غير رتيبة على مجال I
- دراسة رتابة $f$ على مجال I يعني تجزيء I إلى مجالات تكون فيها $f$ رتيبة. ونلخص الدراسة في جدول يسمى جدول التغيرات

## 3- معدل التغير

### أ- تعريف

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و $x_1$ و $x_2$ عنصرين مختلفينمن $D_f$

العدد $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ يسمى معدل تغير الدالة $f$ بين $x_1$ و $x_2$.

**مثال** نعتبر $f(x)=x^2-3x$

أحسب معدل تغيرات $f$ بين 2 و -1

### ب- معدل التغير و الرتابة

بتوظيف التعريف نحصل على

**خاصية**

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي و I مجال ضمن $D_f$

- تكون $f$ تزايدية على I إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و $x_2$ مختلفين من I $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$
- تكون $f$ تزايدية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و $x_2$ مختلفين من I $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\succ 0$
- تكون $f$ تناقصية على I إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و $x_2$ مختلفين من I $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$
- تكون $f$ تناقصية قطعا على I إذا و فقط إذا كان لكل $x_1$ و $x_2$ مختلفين من I $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\prec 0$

**تمرين**

نعتبر $f(x)=x^2-4x-1$

أدرس رتابة $f$ على كل من المجالين $]2;+\infty[$ ; $]-\infty;2]$

و أعط جدول تغيرات $f$

**الجواب**

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{R}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{a^2-4a-1-b^2+4b+1}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)-4(a+b)}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b-4)}{a-b}=a+b-4$$

إذا كان $a$ و $b$ من $]2;+\infty[$ فان $a\succ 2$ و $b\succ 2$ ومنه $a+b\succ 4$ أي $a+b-4\succ 0$

إذن $f$ تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$

إذا كان $a$ و $b$ من $]-\infty;2]$ فان $a \le 2$ و $b \le 2$ ومنه $a+b \le 4$ أي $a+b-4 \le 0$

إذن $f$ تناقصية على $]-\infty;2]$

جدول التغيرات

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | |

تمرين

نعتبر $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

أدرس رتابة $f$

## 4- الرتابة وزوجية دالة

أ- خاصية

لتكن $f$ دالة زوجية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J = \{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت $f$ تزايدية على I فان $f$ تناقصية على J.
- إذا كانت $f$ تناقصية على I فان $f$ تزايدية على J.

البرهان

لتكن $f$ دالة زوجية و $x_1$ و $x_2$ عنصرين مختلفين من J

ومنه يوجد $x_1'$ و $x_2'$ من I حيث $x_1' = -x_1$ و $x_2' = -x_2$

$$\frac{f(x_2')-f(x_1')}{x_2'-x_1'} = \frac{f(-x_2)-f(-x_1)}{-x_2+x_1} = -\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

إذن تغيرات $f$ على I عكس تغيرات $f$ على J

أ- خاصية

لتكن $f$ دالة فردية و I مجال ضمن $D_f \cap \mathbb{R}^+$ و J مجال مماثل لـ I بالنسبة لـ 0 $\left(J = \{-x / x \in I\}\right)$

- إذا كانت $f$ تزايدية على I فان $f$ تزايدية على J.
- إذا كانت $f$ تناقصية على I فان $f$ تناقصية على J.

ملاحظة

لدراسة تغيرات دالة فردية أو زوجية يكفي دراسة تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^+$ ثم استنتاج تغيراتها على $D_f \cap \mathbb{R}^-$

تمرين

نعتبر $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

1- حدد $D_f$ و أدرس زوجية $f$

2- أدرس تغيرات $f$ و أعط جدول تغيراتها

## VI- القيمة القصوى – القيمة الدنيا

تعريف

لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي

- نقول ان $f$ تقبل قيمة قصوى عند $a$ إذا وجد مجال I ضمن $D_f$ و $a \in I$ حيث لكل $x \in I - \{a\}$ $f(x) \prec f(a)$
- نقول ان $f$ تقبل قيمة دنيا عند $a$ إذا وجد مجال I ضمن $D_f$ و $a \in I$ حيث لكل $x \in I - \{a\}$ $f(x) \succ f(a)$

اصطلاح

كل من قيم القصوى و قيم الدنيا تسمى مطاريف لدالة $f$

تمرين نعتبر $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1- أدرس زوجية $f$ أحسب $f(1)$

2- بين أن لكل $x$ من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq 2$

3- حدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ $f$ إذا وجد

الجواب

1- ندرس زوجية $f$

$D_f=\mathbb{R}^*$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$

إذن $f$ فردية

حساب $f(1)=1+\frac{1}{1}=2$

2- نبين أن لكل $x$ من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq 2$

ليكن $x$ من $]0;+\infty[$

$$f(x)-2=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$$

بما أن $x\succ 0$ و $(x-1)^2\geq 0$ فان $f(x)\geq 2$

3- نحدد قيمة دنيا و قيمة قصوى لـ $f$

من 1/ و 2/ نستنتج أن لكل $x$ من $]0;+\infty[$ $f(x)\geq f(1)$

اذن $f$ تقبل قيمة دنيا عند 1

ليكن $x\in]-\infty;0[$ و منه $-x\in]0;+\infty[$ مما سبث نستنتج أن $f(-x)\geq f(1)$

و حيث $f$ فردية فان $-f(x)\geq f(1)$ و بالتالي $f(x)\leq -f(1)$ أي $f(x)\leq f(-1)$

اذن $f$ تقبل قيمة قصوى عند 1-

خاصية

ليكن $a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية حيث $a\prec b\prec c$ و $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت $f$ تزايدية على $[a;b]$ و تناقصية على $[b;c]$ فان $f$ تقبل قيمة قصوى عند $b$

إذا كانت $f$ تناقصية على $[a;b]$ و تزايدية على $[b;c]$ فان $f$ تقبل قيمة دنيا عند $b$

V - دراسة تغيرات دالة – دراسة وضعة منحنين

دراسة تغيرات دالة $f$ يعني

– تحديد $D_f$

- دراسة رتابة $f$ وتلخيصها في جدول التغيرات

-----------------------------------------

دراسة وضع منحنيين مبيانيا

ليكن $C_f$ و $Cg$ منحنيين للدالتين $f$ و $g$ على التوالي

يكون $f(x)\succ g(x)$ على المجال $I$ اذا و فقط كان $C_f$ فو ق $Cg$ في المجال $I$

يكون $f(x)\prec g(x)$ على المجال $I$ اذا و فقط كان $C_f$ تحت $Cg$ في المجال $I$

حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ على المجال $I$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين $C_f$ تحت $Cg$ في المجال $I$

تمرين

أدرس تغيرات $f$ حيث $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x-1}$

تمرين

أدرس تغيرات $f$ حيث $f(x)=x^3-3x$

حدد مطاريف الدالة $f$

## تمارين و حلول

### تمرين1

نعتبر $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x)=x|x|-4x$

1 – أدرس زوجية الدالة $f$

2 – أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين $x$ و $y$ من $[0;+\infty[$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$$

ب) حدد رتابة $f$ على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و استنتج رتابة $f$ على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة $f$

3- حدد مطاريف الدالة $f$ إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(D)$ ذا المعادلة $y=-2x$

$f(x)=x|x|-4x$

1 – ندرس زوجية الدالة $f$

لدينا $D_f=\mathbb{R}$

لكل $x$ من $\mathbb{R}$ : $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-x|-x|+4x=-(x|x|-4x)=-f(x)$$

إذن $f$ دالة فردية

2 – أ) نبين أن لكل عنصرين مختلفين $x$ و $y$ من $[0;+\infty[$: $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x+y-4$

لدينا لكل $x$ من $[0;+\infty[$: $f(x)=x^2-4x$

ليكن $x$ و $y$ من $[0;+\infty[$ حيث $x\neq y$:

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{x^2-4x-y^2+4y}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y)-4(x-y)}{x-y}$$
$$=\frac{(x-y)(x+y-4)}{x-y}$$
$$=x+y-4$$

ب) نحدد رتابة $f$ على كل من $[0;2[$ و $]2;+\infty[$ و نستنتج رتابة $f$ على كل من $]-2;0]$ و $]-\infty;-2[$

* ليكن $x$ و $y$ من $[0;2[$ حيث $x\neq y$ ومنه $0\le x\prec 2$ و $0\le y\prec 2$

و بالتالي $0\le x+y\prec 4$ أي $-4\le x+y-4\prec 0$

ومنه $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$

إذن $f$ تناقصية قطعا على $[0;2[$ و حيث أن $f$ فردية فان $f$ تناقصية قطعا على $]-2;0]$

* ليكن $x$ و $y$ من $]2;+\infty[$ حيث $x \neq y$ ومنه $x \succ 2$ و $y \succ 2$

وبالتالي $x+y-4 \succ 0$ أي $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \succ 0$

إذن $f$ تزايدية قطعا على $]2;+\infty[$ ومنه $f$ تزايدية قطعا على $]-\infty;-2[$

ج) جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | -2 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $\nearrow$ | 4 | $\searrow$ | -4 | $\nearrow$ |

3- نحدد مطاريف الدالة $f$

بما أن $f$ تزايدية على كل من $]2;+\infty[$ و $]-\infty;-2]$ و تناقصية على $[-2;2]$ فان $f$ تقبل قيمة قصوى عند -2 هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي -4

4- نحدد تقاطع المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(D)$ ذا المعادلة $y=-2x$

تحديد تقاطع المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(D)$ يرجع إلى حل المعادلة $x|x|-4x=-2x$

$x|x|-4x=-2x$ تكافئ $x|x|-2x=0$

تكافئ $x(|x|-2)=0$

تكافئ $x=0$ أو $|x|=2$

تكافئ $x=0$ أو $x=2$ أو $x=-2$

إذن المنحنى $(C_f)$ و المستقيم $(D)$ يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 2 و -2

## تمرين2

نعتبر $f$ دالة عددية معرفة بـ $f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$

1- حدد $D_f$ و بين أن $f$ دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين $a$ و $b$ من $D_f$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحى تغيرات $f$ على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحى تغيراتها على $[-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

4- أعط جدول تغيرات $f$

## الحل

$$f(x)=\frac{-x}{x^2-1}$$

1- نحدد $D_f$

*- ليكن $x \in \mathbb{R}$

$x \in D_f$ يكافئ $x^2-1 \neq 0$

تكافئ $x^2 \neq 1$

تكافئ $x \neq 1$ و $x \neq -1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

*- نبين أن $f$ دالة فردية

لكل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ : $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

لتكن $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

$$f(-x)=\frac{-(-x)}{(-x)^2-1}=-\frac{-x}{x^2-1}=-f(x)$$

إذن $f$ دالة فردية

2- نبين أن لكل عنصرين مختلفين $a$ و $b$ من $D_f$ $\quad \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن $a$ و $b$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ حيث $a\neq b$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\frac{-a}{a^2-1}-\frac{-b}{b^2-1}}{a-b}=\frac{-a(b^2-1)+b(a^2-1)}{(a^2-1)(b^2-1)}\times\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-ab^2+a+ba^2-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab(a-b)+a-b}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a-b)(ab+1)}{(a^2-1)(b^2-1)(a-b)}=\frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- نحدد منحى تغيرات $f$ على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و نستنتج منحى تغيراتها على $]-1;0]$ و $]-\infty;-1[$

لدينا لكل عنصرين مختلفين $a$ و $b$ من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ $\quad \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$

ليكن $a$ و $b$ من $[0;1[$

ومنه $0\leq b\prec 1$ ; $0\leq a\prec 1$ و بالتالي $0\leq b^2\prec 1$ et $0\leq a^2\prec 1$ et $0\leq ab\prec 1$

ومنه $-1\leq b^2-1\prec 0$ et $-1\leq a^2-1\prec 0$ et $1\leq ab+1\prec 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه $f$ تزايدية على $[0;1[$

و حيث أن $f$ فردية فان $f$ تزايدية على $]-1;0]$

ليكن $a$ و $b$ من $]1;+\infty[$

ومنه $b\succ 1$ ; $a\succ 1$ و بالتالي $b^2\succ 1$ et $0\leq a^2\succ 1$ et $ab\succ 1$

ومنه $b^2-1\succ 0$ et $a^2-1\succ 0$ et $ab+1\succ 2$

إذن $\dfrac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}\succ 0$ ومنه $f$ تزايدية على $]1;+\infty[$

و حيث أن $f$ فردية فان $f$ تزايدية على $]-\infty;-1[$

4- جدول تغيرات $f$

| $x$ | $-\infty$      -1 |      0      1 |      $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |