الهندسة

مذكرة رقم15 : ملخص لدرس: الهندسة الفضائية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف والقدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- موضوعات التلاقي، تحديد مستوى في الفضاء؛ - الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء؛ - خاصيات التوازي والتقاطع؛ - التعامد: تعامد مستقيم ومستوى، تعامد مستويين؛ - خاصيات التعامد والتوازي؛	- تعرف وتمثيل أجزاء في الفضاء على المستوى. - إدراك حالات المماثلة وحالات اللامماثلة بين مفاهيم وخاصيات في المستوى ونظيراتها في الفضاء. - توظيف خاصيات الهندسة الفضائية في حل مسائل مستقاة من الواقع.	- انطلاقا من دراسة بعض الأشكال والمجسمات الاعتيادية من الفضاء ودراسة بعض المقاطع المستوية يتمكن التلاميذ من إبراز النتائج المتعلقة بالأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفضاء (التوازي، التعامد، التقاطع) واستقراء التعاريف والخاصيات المتعلقة بالتوازي والتعامد في الفضاء. - ينبغي الالتزام بالحد الأدنى الضروري من خاصيات الفضاء (الخاصيات والتعاريف والموضوعات الأساسية). - ينبغي ضبط بعض التقنيات والقواعد التي تتحكم في رسم الأشكال الفضائية على المستوى (دور الخطوط المتصلة والخطوط المتقطعة...). - يتعين الانتقال التدريجي من مستوى التجربة والملاحظة إلى مستوى البرهان الرياضي. - تعتبر جميع صيغ المساحات والحجوم مقبولة في هذا المستوى. - يمكن الاستئناس في حدود المتوفر بالمؤسسات التعليمية، ببعض البرانم المعلوماتية المندمجة في الحاسوب لتحديد المقاطع المستوية لبعض المجسمات من الفضاء.

I. موضوعات الهندسة الفضائية:

نرمز ب (E) إلى الفضاء.

- من نقطتين مختلفتين A و B من الفضاء (E) يمر مستقيم وحيد (AB).
- من ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء (E) يمر مستوى وحيد يرمز له ب (ABC).
- إذا احتوى مستوى (P) من الفضاء (E) على نقطتين A و B فانه يتضمن المستقيم (AB).

يعني إذا كان $A\in(P)$ و $B\in(P)$ فان $(AB)\subset(P)$.

- إذا اشترك مستويان مختلفان من الفضاء (E) في نقطة A فإنهما يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يمر من A.

إذا كان $\left\{\begin{matrix} A\in(P) \text{ و } A\in(Q) \\ (P)\neq(Q)\end{matrix}\right.$ فــان $(P)\cap(Q)=(\Delta)/A\in(\Delta)$

- جميع خاصيات الهندسة الفضائية تبقى صحيحة في كل مستوى من الفضاء (E).

نتائج: يتحدد مستوى في الفضاء إما:

بثلاث نقط غير مستقيمية.

بمستقيم و نقطة لا تنتمي إليه.

$\leftarrow$ بمستقيمين متقاطعين.

$\leftarrow$ بمستقيمين متوازيين قطعا.

II. الأوضاع النسبية في الفضاء:

الأوضاع النسبية لمستقيمين: ليكن (D) و (Δ) مستقيمين من الفضاء (E) لدينا ثلاث وضعيات ممكنة:

- (D) و (Δ) متوازيان يعني $(D)\cap(\Delta)=\phi$
- (D) و (Δ) متقاطعان يعني $(D)\cap(\Delta)=\{I\}$
- (D) و (Δ) غير مستوائيان يعني (D) يخترق المستوى
- (P) الذي يضم المستقيم (Δ) في نقطة I لا تنتمي إلى (Δ).

1. الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى:

ليكن (D) مستقيما و (P) مستوى من الفضاء (E) لدينا حالات ممكنة:

- المستقيم (D) ضمن (P) ونكتب $(D)\subset(P)$
- المستقيم (D) خارج (P) ونكتب $(D)\cap(\Delta)=\phi$
- المستقيم (D) يخترق (P) ومنه $(D)\cap(\Delta)=\{I\}$

2. الأوضاع النسبية لمستويين من الفضاء:

ليكن (P) و (Q) مستويين مختلفين من الفضاء (E) لدينا حالتين:

(P) و (Q) منفصلان (متوازيان قطعا) أو (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم

III. التوازي في الفضاء:

1. توازي مستقيمين: يكون مستقيمان (D) و (D') متوازيين إذا و فقط إذا كانا مستوائيين منطبقان أو منفصلان و نكتب $(D)\parallel(D')$.

خاصيات و مبرهنات: كل مستقيمان متوازيان قطعا يحددان مستوى و حيد في الفضاء.

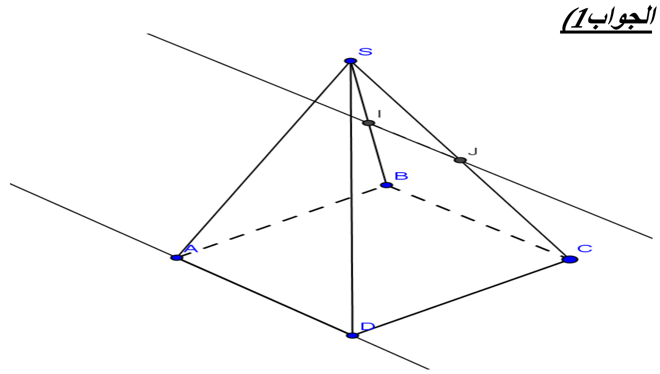
- أذا كان مستقيمان متوازيين فان أي مستقيم يوازي أحدهما يوازي الأخر
و $(D')\parallel(\Delta)$ إذن $(D)\parallel(D')$

2. توازي مستقيم و مستوى: يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا كان (D) ضمن (P) أو كان (D) و (P) منفصلان $(P)\cap(Q)=\phi$ و نكتب $(D)\parallel(P)$.

خاصيات و مبرهنات: يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا وجد مستقيم (Δ) ضمن (P) يوازي المستقيم (D).

تمرين 1:
ليكن $SABCD$ هرما قاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$
و لتكن I و J منتصفي القطعتين $[SB]$ و $[SC]$ على التوالي.
1) بين أن $(AD)\parallel(IJ)$
2) أثبت أن $(IJ)\parallel(ADS)$

الجواب1



في المثلث SBC لدينا: I منتصف $[SB]$ و J منتصف $[SC]$
إذن, $(IJ)\parallel(BC)$.
و لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع اذن $(BC)\parallel(AD)$ و منه ان $(AD)\parallel(IJ)$ (1)
لدينا $A\in(ADS)$ و $D\in(ADS)$ إذن $(AD)\subset(ADS)$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أن: $(IJ)\parallel(ADS)$

3. توازي مستويين: يكون مستويان (P) و (Q) متوازيين إذا و فقط إذا كانا منطبقين أو منفصلين و نكتب $(P)\parallel(Q)$.
$(P)\parallel(Q)$ تكافئ $(P)\cap(Q)=\phi$ أو $(P)=(Q)$.

خاصيات و مبرهنات: يكون مستويان من الفضاء متوازيين إذا وفقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين و موازيين للأخر.

- إذا كان مستويان متوازيين فان أي مستوى يقطع أحدهما يقطع الأخر و يكون مستقيما تقاطعهما مع هذا المستوى متوازيين.
- إذا كان مستويان متوازيين فان أي مستقيم يخترق أحدهما يخترق الأخر.
- إذا اشتمل مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا فان تقاطعهما يكون مستقيما موازيا اهذين المستقيمين (مبرهنة السقف).

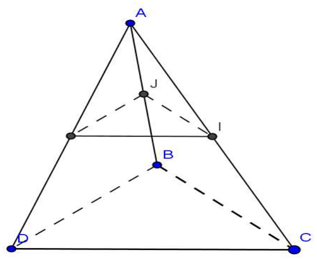
إذا كان $\left\{\begin{array}{l}(D')\subset(P')(D)\subset(P)\\(D')\parallel(D)\\(P)\cap(P')=(\Delta)\end{array}\right.$ فان $(D)\parallel(\Delta)\parallel(D')$

- إذا وازى مستويان مستوى ثالثا فإنهما يكونان متوازيين.

تمرين2: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[AC]$
و J منتصف القطعة $[AB]$ و K منتصف القطعة $[AD]$

1) أنشئ شكلا مناسبا.
2) بين أن $(IJK)\parallel(BCD)$

الجواب1



2) في المثلث ABC
لدينا I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[AB]$ اذن
$(IJ)\parallel(BC)$
و لدينا في المثلث ABD
: K منتصف $[AD]$ و J منتصف $[AB]$ اذن $(JK)\parallel(BD)$
و لدينا : $(IJ)\parallel(BC)$ و $(BC)\subset(BCD)$ إذن $(IJ)\parallel(BCD)$ (1)
و لدينا : $(JK)\parallel(BD)$ و $(BD)\subset(BCD)$ إذن $(JK)\parallel(BCD)$ (2)
و لدينا : $(IJ)\cap(JK)=\{J\}$ (3)
و لدينا : $(IJ)\subset(IJK)$ و $(JK)\subset(IJK)$ (4)
إذن (1) و (2) و (3) و (4) نستنتج أن: $(IJK)\parallel(BCD)$

IV. التعامد في الفضاء:

1. تعامد مستقيمين:

نقول بأن مستقيمين (D) و (Δ) من الفضاء متعامدان إذا و فقط إذا كان الموازيان لهما في أية نقطة من الفضاء متعامدين و نكتب: $(D)\perp(\Delta)$

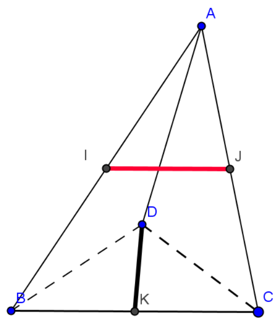
$(D')\subset(P)$ و $(\Delta')\subset(P)$
$(D)\parallel(D')$ و $(\Delta)\parallel(\Delta')$
$(D')\perp(\Delta')$ يعني $(D)\perp(\Delta)$

خاصية: إذا كان مستقيمان متوازيان فان كل مستقيم متعامد مع أحدهما يكون متعامدا مع الأخر.

تمرين3: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه حيث : $BD=DC$ و لتكن I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AC]$ و K منتصف القطعة $[BC]$

1) أنشئ شكلا مناسبا.
2) بين أن $(IJ)\perp(DK)$

الجواب1



في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$ اذن
$(IJ)\parallel(BC)$ (1)
و في المثلث BCD
لدينا $BD=DC$ و K منتصف القطعة $[BC]$ اذن :
$(DK)\perp(BC)$ (2)
من (1) و (2) نستنتج أن: $(IJ)\perp(DK)$

2. المستقيمات و المستويات المتعامدة:

نقول بأن مستقيما (D) عمودي عل مستوى (P) إذا و فقط إذا كان متعامدا مع جميع مستقيمات المستوى (P) و نكتب: $(D)\perp(P)$

خاصيات و مبرهنات: يكون مستقيم (D) عموديا عل مستوى (P) إذا و فقط إذا كان متعامدا مع مستقيمين متقاطعين ضمن (P).

إذا كان مستقيمان متوازيين فان أي مستوى عمودي على أحدهما يكون عموديا على الأخر.

$(\Delta_1)\subset(P)$ و $(\Delta_2)\subset(P)$ ، $(D)\perp(\Delta_1)$ و $(D)\perp(\Delta_2)$

و منه $(D)\perp(P)$

■ **المستويات المتعامدة:** نقول بأن مستوى (P) على مستوى (Q) إذا تضمن أحدهما مستقيما عموديا على الأخر و نكتب: $(D)\perp(Q)$

خاصيات و مبرهنات:

• إذا كان مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) فان كل مستوى مار من (D) يكون عموديا على (P).

• إذا كان مستوى (P) عموديا على مستوى (Q) فان كل مستقيم ضمن أحدهما عمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على الأخر.

• إذا كان مستوى عموديا على مستويين متقاطعين فان هذا المستوى يكون عموديا على مستقيم التقاطع.

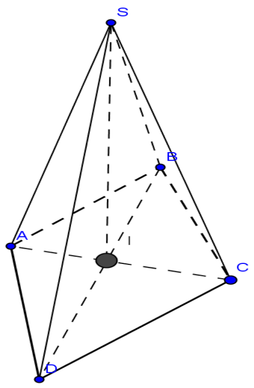
تمرين4: ليكن $ABCD$ شبه منحرف قطراه $[AC]$ و $[BD]$ يتقاطعان في I . لتكن S نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوى (ABC) بحيث يكون $(SI)\perp(ABC)$

1) حدد تقاطع المستويين (SAC) و (SBD) وحدد تقاطع المستويين (SAB) و (SDC) .

2) تحقق أن $(SI)\perp(AB)$ وبين أن المستويين (SAC) و (ABC) متعامدان.

3) نفترض أن المثلث ABC قائم الزاوية في B و أن $SI=3$ و $BC=\frac{1}{4}$, $AB=2$, $CD=3$.

أحسب حجم الهرم $SABCD$



الجواب:

1)أ) لدينا $(SAC)\neq(SBD)$ لأن النقط S , A , B , C و D غير مستوائية.

لدينا: $S\in(SAC)$

و $S\in(SBD)$

و لدينا $I\in(AC)$ و $(AC)\subset(SAC)$ إذن $I\in(SAC)$

و لدينا $I\in(BD)$ و $(BD)\subset(SBD)$ إذن $I\in(SBD)$

إذن المستويان (SAC) و (SBD) يشتركان في النقطتين S و I .

إذن $(SAC)\cap(SBD)=(IS)$

ب)لدينا $S\in(SAB)$ و $S\in(SDC)$

و لدينا $(AB)\subset(SAB)$ و $(DC)\subset(SDC)$ و $(DC)\parallel(AB)$.

إذن (SAB) و (SDC) يتقاطعان في مستقيم يمر من S و يوازي المستقيمين (AB) و (DC). حسب مبرهنة السقف.

2)أ)لدينا $(SI)\perp(ABC)$ و $(AB)\subset(ABC)$.

إذن $(SI)\perp(AB)$

ب)لدينا $(SI)\subset(SAC)$ و $(SI)\perp(AC)$

إذن $(SI)\perp(ABC)$ و منه فان $(ABC)\perp(SAC)$

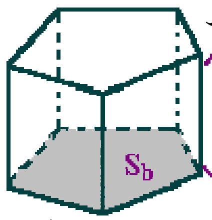
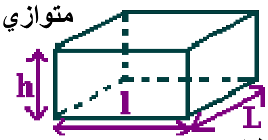
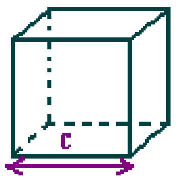
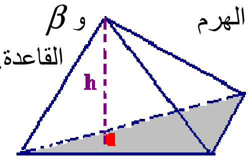
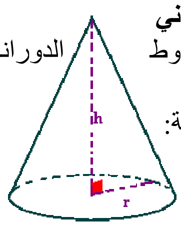
3) $((AB)\perp(BC))$ و منه مساحة شبه المنحرف $ABCD$

هي: $S=\frac{(DC+AB)\times BC}{2}=\frac{(3+2)\times\frac{1}{4}}{2}=\frac{5}{8}$

(لأن ارتفاعه هو BC)ومنه حجم الهرم $SABCD$ هو: $V=\frac{1}{3}\cdot S\times(SI)$

أي: $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)\cdot 3=\frac{5}{8}$

I. **المساحة و الحجم:** مساحات و حجوم بعض المجسمات الاعتيادية: الموشور القائم, متوازي المستطيلات, المكعب , الهرم رباعي الأوجه المنتظم و المخروط الدوراني:

الموشور القائم  ليكن h ارتفاع الموشور و l محيط قاعدته و S_b مساحة قاعدة. المساحة الجانبية: $S_l=l\times h$ المساحة الكلية: $S_T=l\times h+2S_b$ الحجم: $V=S_b\times h$	**متوازي المستطيلات**  ليكن L و l و h على التوالي طول و عرض و ارتفاع متوازي المستطيلات. المساحة الجانبية: $S_l=2(l+L)\times h$ المساحة الكلية: $S_T=2(l+L)\times h+2l\times L$ الحجم: $V=L\times l\times h$
المكعب.  ليكن a طول حرف المكعب. المساحة الجانبية: $S_l=4a^2$ المساحة الكلية: $S_T=6a^2$ الحجم: $V=a^3$	**الهرم**  h ارتفاع الهرم و β مساحة القاعدة. الحجم: $V=\frac{1}{3}\beta\times h$
رباعي الأوجه المنتظم ليكن a طول ضلع رباعي الأوجه المنتظم. المساحة الجانبية: $S_l=\frac{1}{2}l\times h$ الحجم: $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	**المخروط الدوراني**  h ارتفاع المخروط الدوراني و $e=SH$. المساحة الجانبية: $S_l=\pi R\times h$ الحجم: $V=\frac{\pi R^2\times h}{3}$

تمرين5: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء.

لتكن I و J منتصفي القطعتين $[BC]$ و $[FG]$ على التوالي.

1) بين أن $(IJ)\parallel(HFB)$

2) بين أن $(HFB)\cap(EJ)=(PQ)$

حيث $(HF)\cap(EJ)=\{P\}$

و $(AI)\cap(BD)=\{Q\}$

3) بين أن $(PQ)\parallel(FB)$

الجواب:1) لدينا I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[FG]$ و لدينا $(IJ)\parallel(BF)$ و بما أن $(BF)\subset(HFB)$ فان $(IJ)\parallel(HFB)$ و هذا هو المطلوب.

2) لدينا $(EJ)\subset(EIJ)$ و $(AI)\subset(EIJ)$ (لأن $(IJ)\parallel(AE)$ و منه النقط A , I , E و J نقط استوائية)

إذن $P\in(EIJ)$ و $Q\in(EIJ)$ ($Q\in(AI)$ و $P\in(EJ)$) و هذا يعني أن $(PQ)\subset(EIJ)$ (1) من جهة أخرى لدينا $(HF)\subset(HFB)$ و $(BD)\subset(HFD)$ (لأن $(BF)\parallel(DH)$ ومنه النقط D , H و F مستوائية).

إذن $P\in(HFD)$ و $Q\in(HFD)$ و هذا يعني أن $(PQ)\subset(HFD)$ (2) بما أن $(EIJ)\neq(HFD)$ فان (من (1) و (2)) $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$

3) لدينا $(IJ)\parallel(BF)$ و $(IJ)\subset(EIJ)$ و $(BF)\subset(HFD)$ و $(HFD)\cap(EIJ)=(PQ)$ إذن $(PQ)\parallel(FB)$.

تمرين 6: ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مماثلة B بالنسبة للنقطة D.

2) أنشئ شكلا مناسبا.

3) بين أن $(CB')\parallel(AID)$

4) حدد تقاطع المستويين (AID) و $(AB'C)$.

الجواب:1)

2) لدينا ن I منتصف القطعة $[BC]$ و B' مماثلة B بالنسبة للنقطة D .

إذن D منتصف $[BB']$

و منه $(ID)\parallel(B'C)$ و لدينا $(ID)\subset(AID)$

إذن $(CB')\parallel(AID)$

3) لدينا $A\in(AID)$ و $A\in(AB'C)$ و $(AID)\neq(AB'C)$

إذن المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A .

و بما أن $(ID)\subset(AID)$ و $(B'C)\subset(AB'C)$.

و أن $(B'C)\parallel(ID)$

فان المستويين (AID) و $(AB'C)$ يتقاطعان في مستقيم يمر من A و يوازي $(B'C)$ و (ID).

تمرين 7: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا .

لتكن I , J و K منتصفات القطع $[AB]$, $[EF]$ و $[GH]$ على التوالي.

1) بين أن النقط B , C , J و K مستوائية.

2) بين أن I , B , H و K مستوائية.

3) بين أن $(IH)\parallel(KB)$.

4) استنتج أن $(IH)\parallel(JKC)$.

الجواب:

1) في المربع $EFGH$ لدينا I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $(EH)\parallel(JK)\parallel(FG)$

و نعلم أن $(BC)\parallel(FG)$ إذن $(JK)\parallel(BC)$

و منه فان النقط B , C , J و K مستوائية.

2) لدينا $(EF)\parallel(AB)$ و $(HG)\parallel(EF)$ إذن $(AB)\parallel(HG)$ و منه فان النقط A , B , G و H مستوائية.

و لدينا $I\in[AB]$ و $K\in[HG]$.

إذن النقط I , B , H و K مستوائية.

3) $AB=HG$ و I منتصف $[AB]$ و K منتصف $[GH]$ إذن $IB=HK$.

و نعلم أن $(HK)\parallel(IB)$

إذن الرباعي $IBKH$ متوازي أضلاع و منه فان $(KB)\parallel(IH)$

4) لدينا النقط B , C و I مستوائية.

و لدينا $(BK)\subset(JCK)$ و $(BK)\parallel(IH)$

إذن $(IH)\parallel(JKC)$.

تمرين 8: ليكن $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات.

و لتكن O و O' مركزي المستطيلين $ABCD$ و $A'B'C'D'$ على التوالي.

1) أنشئ شكلا مناسبا.

2) بين أن النقط A , A' , C و C' مستوائية.

بين أن B , B' , D و D' مستوائية.

3) بين أن $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$

4) بين أن $(BB')\parallel(AA')\parallel(OO')$ و $(DD')\parallel(CC')\parallel(OO')$.

الجواب:1)

2) في المستطيل $AA'B'B$ لدينا $(BB')\parallel(AA')$ (1)

في المستطيل $BB'CC'$ لدينا $(CC')\parallel(BB')$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(CC')\parallel(AA')$

و منه فان النقط A , A' , C و C' مستوائية.

و بنفس الطريقة نبين أن: $(DD')\parallel(BB')$ و منه فان النقط B , B' , D و D' مستوائية.

3) لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ إذن $O\in(BD)$ و منه $O\in(BB'D)$ و O' مركز المستطيل $A'B'C'D'$ إذن $O'\in(B'D')$ و منه $O'\in(BB'D)$

ادن $(OO')\subset(BB'D)$ (α)

لدينا O مركز المستطيل $ABCD$ اذن $O\in(AC)$ و منه $O\in(AA'C)$

و O' مركز المستطيل $A'B'C'D'$ إذن $O'\in(A'C')$ و منه $O'\in(AA'C')$

إذن $(OO')\subset(AA'C)$ (β)

و لدينا $(AA'C)\neq(BB'D)$ (A , A' , B , B' , C و D نقط غير مستوائية).

و منه (α) و (β) نستنتج أن: $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$ هذا هو المطلوب

4) لدينا $(AA')\parallel(BB')$ و $(AA')\subset(AA'C)$ و $(BB')\subset(BB'D)$

و $(AA'C)\cap(BB'D)=(OO')$

إذن $(BB')\parallel(AA')\parallel(OO')$

و بنفس الطريقة:

$(CC'')\parallel(DD')$ و $(DD')\subset(BB'D)$ و $(CC')\subset(ACC')$

و $(ACC')\cap(BB'D)=(OO')$

إذن $(DD')\parallel(CC')\parallel(OO')$.

تمرين 9: ليكن $ABCD$ مربعا و E نقطة من الفضاء حيث: $(ABC)\parallel(AE)$

النقط I , J و K منتصفات القطع $[EB]$, $[AB]$ و $[DC]$

1) بين أن $(ADE)\parallel(IJ)$.

بين أن $(IJK) \parallel (ADE)$.

2) بين أن $(JK) \parallel (ABE)$.

3) حدد تقاطع المستويين (ABE) و (AIK).

<u>الجواب:1)</u>لدينا في المثلث ABE

I منتصف $[EB]$ و J منتصف $[AB]$ اذن $(IJ) \parallel (AE)$

و لدينا $(AE) \subset (ADE)$

إذن $(IJ) \parallel (ADE)$ (1)

و منه المطلوب.

لدينا K منتصف $[DC]$

إذن $(JK) \parallel (AD) \parallel (BC)$

و $(AD) \subset (ADE)$ اذن $(JK) \parallel (ADE)$ (2)

إذن(1) و(2) نستنتج أن: $(JIK) \parallel (ADE)$

و منه المطلوب.

2)لدينا $(AE) \perp (ABC)$

و $(JK) \subset (ABC)$ إذن $(AE) \perp (JK)$

و لدينا $(JK) \parallel (AD)$ و $(AD) \perp (AB)$

إذن $(JK) \parallel (AB)$

و منه فان (JK) عمودي على مستقيمين متقاطعين هما (AB) و (AE)

ضمن المستوى (ABE)

إذن $(JK) \perp (ABE)$

3)لدينا $(AIK) \neq (ABE)$ ($E \notin (ABC)$)

لدينا $A \in (ABE)$ و $A \in (AIK)$

و $(EB) \subset (ABE)$ إذن $I \in (ABE)$ (لأن $I \in (EB)$)

لدينا $I \in (AIK)$

و منه $(AIK) \cap (ABE) = (AI)$.

<u>انتهى الدرس</u>