تصحيح فرض 1 الدورة 1	جدع مشترك علمي

تمرين1

1- نفكك العددين 540 و 396 إلى جداء عوامل أولية

540	2	396	2
270	2	198	2
135	3	99	3
45	3	33	3
15	3	11	11
5	5	1	
1			

$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$ $\qquad$ $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$

نحدد PGCD (540 ; 396) و PPCM (540 ; 396)

$PGCD\ (540\ ;\ 396) = 2^2 \times 3^2 = 36$ $\qquad$ $PPCM\ (540\ ;\ 396) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 11 = 5940$

2- نرى هل العددين التاليين أوليين 607 و 997

* الأعداد الأولية التي مربعها أصغر أو يساوي 607 هي: 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و 23

607 لا يقبل القسمة على هذه الأعداد الأولية إذن 607 عدد أولي

* الأعداد الأولية التي مربعها أصغر أو يساوي 997 هي: 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و 23 و 29 و 31

997 لا يقبل القسمة على هذه الأعداد الأولية إذن 997 عدد أولي

تمرين2

1- نبين أن n^2+n+3 عدد فردي

ليكن n عدد صحيح طبيعي

$$n^2+n+3 = n(n+1)+3$$

نعلم أن جداء عددين صحيحين طبيعيين متتاليين عدد زوجي و منه $n(n+1)$ عدد زوجي

نعلم أن مجموع عدد زوجي و عدد فردي هو عدد فردي ومنه $n^2+n+3 = n(n+1)+3$ عدد فردي

2- أ-نتأكد أن $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$

$$n(n+1)(n+2) = (n^2+n)(n+2)$$
$$= n^3+2n^2+n^2+2n$$
$$= n^3+3n^2+2n$$

ب- نبين أن العدد n^3+3n^2+2n يقبل القسمة على 3

ليكن n عدد صحيح طبيعي IN و منه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $n=3k$ أو $n=3k+1$ أو $n=3k+2$

لدينا $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$

إذا كان $n=3k$ فان $n^3+3n^2+2n = 3\left[k(3k+1)(3k+2)\right]$

إذن n^3+3n^2+2n يقبل القسمة على 3

إذا كان $n=3k+1$ فان $n^3+3n^2+2n = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3\left[(3k+1)(3k+2)(k+1)\right]$

إذن n^3+3n^2+2n يقبل القسمة على 3

إذا كان $n=3k+2$ فان $n^3+3n^2+2n = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = 3\left[(3k+2)(k+1)(3k+4)\right]$

إذن n^3+3n^2+2n يقبل القسمة على 3

إذن لكل عدد صحيح طبيعي n: n^3+3n^2+2n يقبل القسمة على 3

تمرين3

1- نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m \succ n$

اذا كان $m-n$ زوجي فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k$

ومنه $m-n+2n=2k+2n$ أي $m+n=2(k+n)$

اذن $m+n$ زوجي

اذا كان $m-n$ فردي فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k+1$

ومنه $m-n+2n=2k+1+2n$ أي $m+n=2(k+n)+1$

اذن $m+n$ فردي

و بالتالي $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

-2 نحل المعادلة $m^2-n^2=96$

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m \succ n$

$m^2-n^2=96$ تكافئ $(m-n)(m+n)=96$

و منه $m+n$ و $m-n$ من قواسم 96

نعلم أن قواسم 96 هي 1 – 96 – 2 – 48 – 3 – 32 – 4 – 24 – 6 – 16 – 8 – 12

و حيث $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية و $m+n \geq m-n$ فان:

$\begin{cases} m+n=48 \\ m-n=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m+n=24 \\ m-n=4 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m+n=16 \\ m-n=6 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m+n=12 \\ m-n=8 \end{cases}$

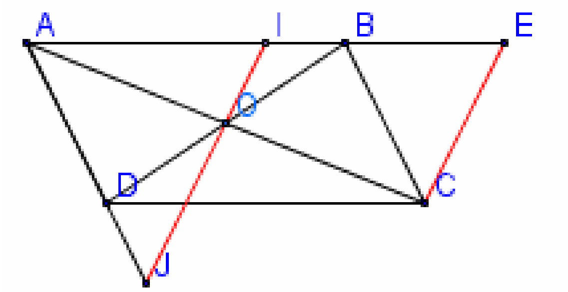
إذن $\begin{cases} m=25 \\ n=23 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m=14 \\ n=10 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m=11 \\ n=5 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m=10 \\ n=2 \end{cases}$

تمرين4

$ABCD$ متوازي الأضلاع مركزه النقطة O.

I و J و E نقط حيث $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

-1 ننشئ الشكل



-2 a/ نبين أن $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

* لدينا $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BI}$

O مركز متوازي الأضلاع $ABCD$ ومنه $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ و O منتصف $[BD]$ أي

$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ و بالتالي $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)$

و حيث أن $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ فان $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

إذن $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

* لدينا $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AJ}$

O مركز متوازي الأضلاع $ABCD$ و منه $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)$

وحيث أن $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ فان $\overrightarrow{OJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

b/ نستنتج أن النقط O و I و J مستقيمية

لدينا $\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

ومنه $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$ إذن النقط O و I و J مستقيمية

3- نبين أن I منتصف $[AE]$

لدينا $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ ومنه $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

و بالتالي $\overrightarrow{AI}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{IE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

ومنه $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IE}$ اذن I منتصف $[AE]$

4- نبين أن $(IJ)//(CE)$

لدينا $\overrightarrow{AI}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

لدينا $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ و منه $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ أي أن $\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

ومنه $\frac{-3}{2}\overrightarrow{CE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

و بالتالي $\frac{-3}{2}\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{IJ}$

إذن $(IJ)//(CE)$

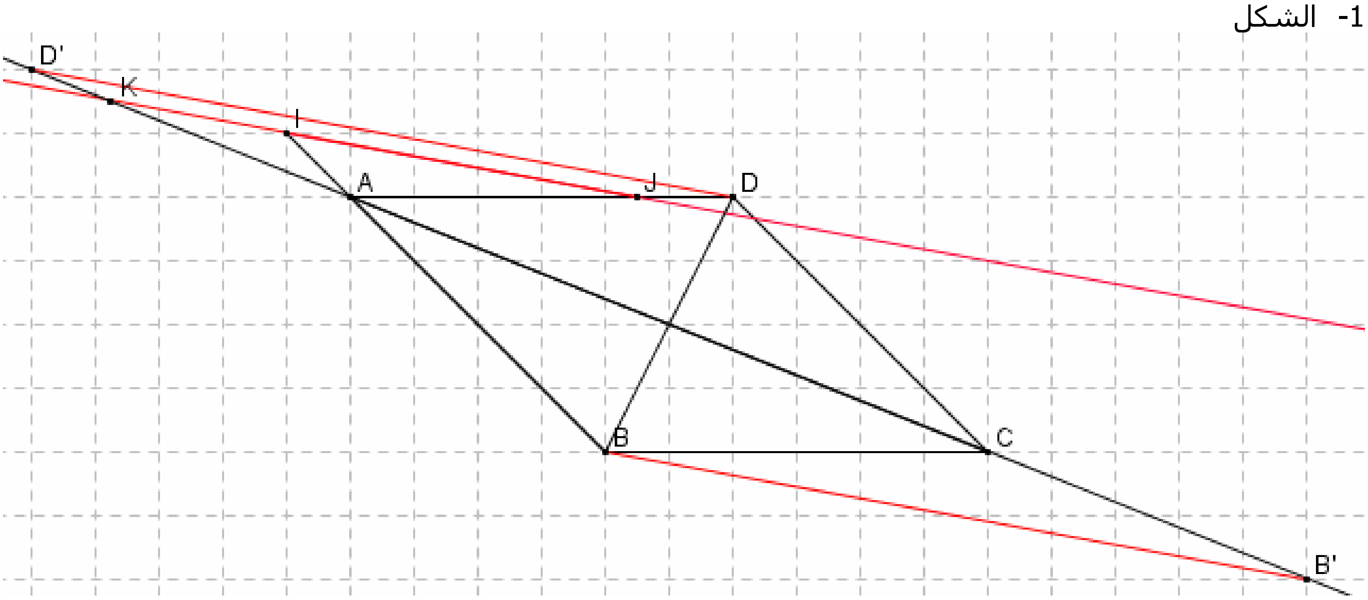
تمرين5

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع حيث $AD=6cm$ و I و J نقطتين حيث $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

و $AJ=4,5cm$ و $J\in[AD]$. ليكن K تقاطع (AC) و (IJ). نعتبر B' و D' مسقطا B و D

على (AC) بتواز مع (IJ)

1- الشكل



نبين أن $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

لدينا $\frac{AJ}{AD}=\frac{4,5}{6}=\frac{3}{4}$ ومنه $AJ=\frac{3}{4}AD$ أي $\left\|\overrightarrow{AJ}\right\|=\frac{3}{4}\left\|\overrightarrow{AD}\right\|$

وحيث أن $J \in [AD]$ فان $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

-2 نبين أن $[AC]$ و $[B'D']$ لهما نفس المنتصف

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فان $[AC]$ و $[BD]$ هما نفس المنتصف O

و حيث أن الإسقاط يحافظ على المنتصف وO و B' وD' مساقط O و B و D على (AC) بتواز مع (IJ)

على التوالي فان O منتصف $[B'D']$

إذن $[AC]$ و $[B'D']$ لهما نفس المنتصف

-3 نبين أن $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB'}$ $\quad$ $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD'}$

لدينا $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و A و K و B' مساقط O و I و B على (AC) بتواز مع (IJ) على التوالي

وحيث أن الإسقاط يحافظ على معامل الاستقامية فان $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB'}$

لدينا $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ و A و K و D' مساقط O و J و D على (AC) بتواز مع (IJ) على التوالي

فان $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD'}$

-4 عبر عن $\overrightarrow{AC}$ بدلالة $\overrightarrow{AK}$

بما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

وحيث أن A و C و B و D مساقط A و C و B' و D' على (AC) بتواز مع (IJ) على التوالي فان

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$

و لدينا $\overrightarrow{AK} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB'}$ $\quad$ $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD'}$ أي $-4\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB'}$ $\quad$ $\frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD'}$

و منه $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AK} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AK}$

إذن $\overrightarrow{AC} = -\frac{8}{3}\overrightarrow{AK}$