الدوال اللوغارتمية

السلسلة 1 (5 تمارين)

التمرين 1 :

الجزء الأول

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2x^3-1+2\ln(x)$

1) أدرس تغيرات g على $]0,+\infty[$
2) بين أنه يوجد على وحيد من $]0,+\infty[$ α بحيث $g(\alpha)=0$
3) أدرس إشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم حدد الفروع اللانهائية ل (C_f)
2) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x$
3) بين أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة ثم ضع جدول تغيرات f
4) أنشئ (C_f) (نأخذ $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$)

الجزء الثالث

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

نرمز ب $\mathcal{D}$ الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=n$

1) بين أن مساحة هذا الحيز ب cm^2 هي : $I_n=2\int_1^n \dfrac{\ln x}{x^2}dx$
2) باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب $\int_1^n \dfrac{\ln x}{x^2}dx$
3) استنتج تعبير I_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

التمرين 2 :

الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=1+\ln(1+x)$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$. و (D) المستقيم ذي المعادلة $y=x$.

1) أ. أدرس تغيرات f

ب. أحسب نهايات f عند محدات D_f

2) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=f(x)-x$

أ. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$

ب. حدد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ و استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ج. أدرس تغيرات g ثم ضع جدول تغيراتها

د. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل بالضبط حلين α و β حيث $\alpha\le 0$ و $2\le\beta\le 3$

ه. أدرس إشارة $g(x)$ و استنتج الوضع النسبي ل (C_f) و (D)

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

1) بين أن : $2\le u_n\le\beta$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) هل $(u_n)_n$ متقاربة ؟ علل جوابك

التمرين 3 :

الجزء الأول

لتكن U الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $U(x)=\ln(x)+x-3$

1) بين أن U تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

2) بين أن المعادلة $U(x)=0$ تقبل حلا و حيدا α في المجال $]0,+\infty[$ ثم تحقق أن $2<\alpha<3$

3) إستنتج إشارة $U(x)$ على $]0,+\infty[$

الجزء الثاني

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2$

و ليكن $\left(C_f\right)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f\left(x\right)$.

2) أ- بين أن لكل x من $\left]0,+\infty\right[$: $f'\left(x\right)=\dfrac{U\left(x\right)}{x^2}$

ب- استنتج تغيرات f على $\left]0,+\infty\right[$

الجزء الثالث

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي : $g\left(x\right)=\ln\left(x\right)$

ليكن $\left(C_g\right)$ المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

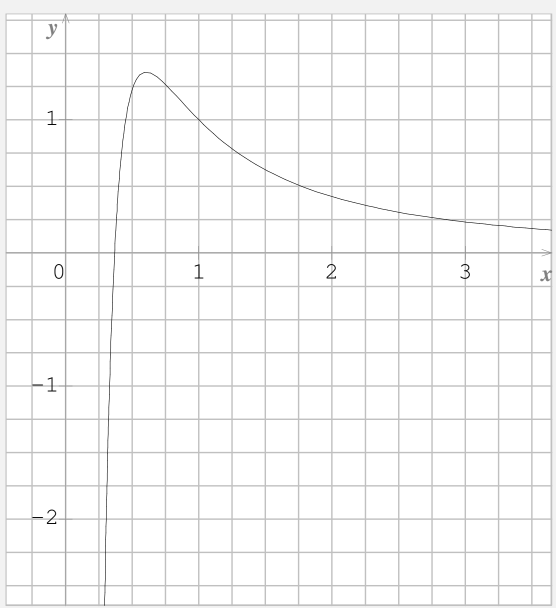
1) بين أن لكل x من $\left]0,+\infty\right[$: $f\left(x\right)-g\left(x\right)=\dfrac{2-\ln x}{x}$ و استنتج أن $\left(C_f\right)$ و $\left(C_g\right)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة يتم تحديدها .

2) بين أن $H:x\longmapsto \dfrac{1}{2}\left(\ln x\right)^2$ دالة أصلية للدالة $h:x\longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$ على $\left]0,+\infty\right[$

3) أحسب التكامل على $I=\int_1^{e^2}\dfrac{2-\ln x}{x}dx$ ثم أول مبيانيا هذه النتيجة

التمرين 4 :

لتكن f الدالة المعرفة على $\left]0,+\infty\right[$ بما يلي : $f\left(x\right)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$. و ليكن $\left(C_f\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (أنظر الشكل أسفله)



1) أ- أدرس نهاية f في 0 على اليمين
ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
ج- حدد مقاربات (C_f)
2) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$
ب- حل في $]0,+\infty[$ المتراجحة $-1-2\ln x>0$. و استنتج إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[$
ج- ضع جدول تغيرات f
3) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الأفاصيل في نقطة وحيدة يتم تحديد إحداثيتيها
ب- إستنتج إشارة $f(x)$ على $]0,+\infty[$
4) لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نرمز ب I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{e}$ و $x=n$.
أ- بين أن $0\le I_2\le e-\frac{1}{2}$
ب- بين أن $F:x\mapsto\frac{-2-\ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على $]0,+\infty[$
ج- أحسب I_n بدلالة n
د- أحسب نهاية (I_n) عند $+\infty$.

التمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$

الجزء الأول

1) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $x^2-2x+2>0$
2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم أدرس تغيرات f
3) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
4) أدرس الفروع اللانهائية ل (C_f)
5) بين أن $(D):x=1$ هو محور تماثل ل (C_f)
6) مثل مبيانيا (C_f) و $(\Delta):y=x$

الجزء الثاني

نضع $\varphi(x)=f(x)-x$
1) أحسب $\varphi'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم استنتج أن φ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$
2) أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)$

ب- بين أن لكل $x>0$: $\varphi(x)=x\left[\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x}-1\right]$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

ج- بين أن $(\Delta): y=x$ يقطع (C_f) في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث $0,3<\alpha<0,4$