جهة سوس ماسة درعة نيابة أكادير	فرض الأولمبياد الجهوي في الرياضيات للجذع المشترك العلمي ـ المرحلة الثانية ـ	الجذع المشترك العلمي و التكنلوجي

حلول مقترحة

تمرين 1 :

1

نعلم أن : $\left(\sqrt{a-1}-1\right)^2 \geq 0$

منه : $a-1-2\sqrt{a-1}+1\geq 0$ منه : $a\geq 2\sqrt{a-1}$ منه : $\sqrt{a-1}\leq \dfrac{a}{2}$ منه : $b\sqrt{a-1}\leq \dfrac{ab}{2}$

مرة أخرى ، نعلم أن : $\left(\sqrt{b-1}-1\right)^2 \geq 0$

منه : $b-1-2\sqrt{b-1}+1\geq 0$ منه : $b\geq 2\sqrt{b-1}$ منه : $\sqrt{b-1}\leq \dfrac{b}{2}$ منه : $a\sqrt{b-1}\leq \dfrac{ab}{2}$

من المتفاوتتين السابقتين نستنتج أن : $b\sqrt{a-1}+a\sqrt{b-1}\leq \dfrac{ab}{2}+\dfrac{ab}{2}$ أي : $\boxed{b\sqrt{a-1}+a\sqrt{b-1}\leq ab}$

2

لدينا : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$ أي $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=1$ ، منه : $\sqrt{x^2+1}+x=\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}+y}$

منه : $\sqrt{x^2+1}+x=\dfrac{1\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)}{\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)}=\dfrac{\sqrt{y^2+1}-y}{y^2+1-y^2}=\sqrt{y^2+1}-y$

منه : $x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}\quad (1)$

مرة أخرى ، لدينا : $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=1$ ، منه : $\sqrt{y^2+1}+y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

منه : $\sqrt{y^2+1}+y=\dfrac{1\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{x^2+1-x^2}=\sqrt{x^2+1}-x$

منه : $x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\quad (2)$

بجمع المتساويتين (1) و (2) نجد : $2(x+y)=0$ بالتالي : $\boxed{x+y=0}$

تمرين 2 :

نعلم أن لكل عددين حقيقين موجبين a و b : $a+b\geq 2\sqrt{ab}$

إذن : $1+\dfrac{1}{y^2}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{y^2}}$ أي $1+\dfrac{1}{y^2}\geq \dfrac{2}{y}$ منه : $x\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)\geq \dfrac{2x}{y}$

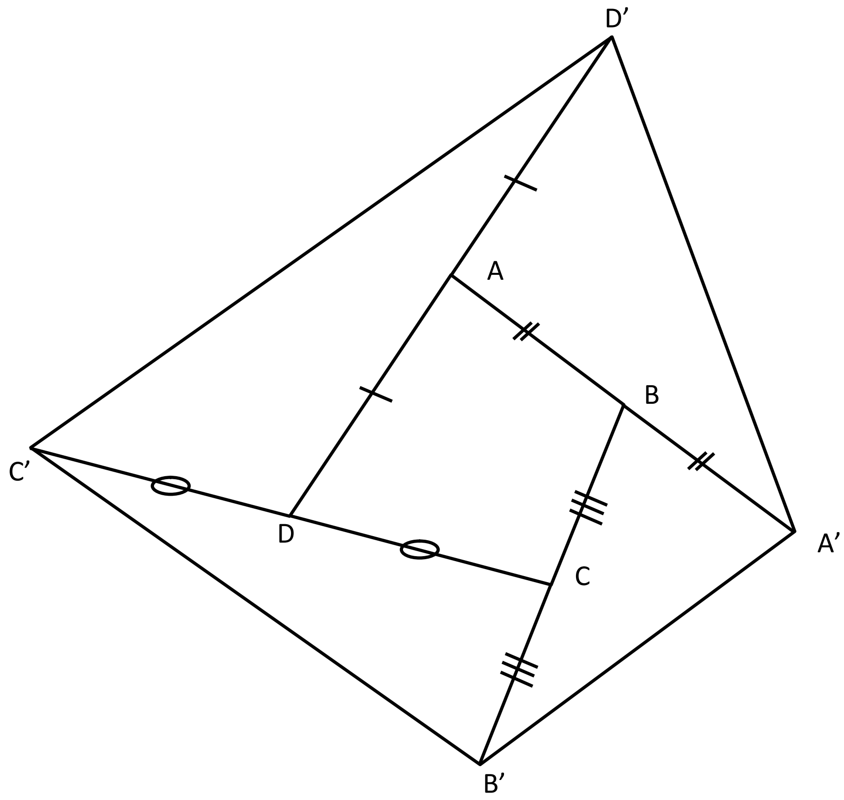
أيضا : $1+\dfrac{1}{x^2}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$ أي $1+\dfrac{1}{x^2}\geq \dfrac{2}{x}$ منه : $y\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)\geq \dfrac{2y}{x}$

إذن : $x\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)+y\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)\geq \dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}$

و لدينا مرة ثالثة $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}\geq 2\sqrt{\dfrac{2x}{y}\times\dfrac{2y}{x}}$ أي $\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}\geq 4$ ، بالتالي $x\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)+y\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)\geq \dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}\geq 4$

يفترض معرفة بعض المتفاوتات الهامة من بينها: $a^2+b^2\geq 2ab$ و $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ و $(a+b)^2\geq 4ab$

تمرين 3 :



لدينا : $S(ABD)=\frac{1}{2}AB\times AD\times\sin\left(B\hat{A}D\right)$

و $S(AA'D')=\frac{1}{2}AD'\times AA'\times\sin\left(D'\hat{A}A'\right)=\frac{1}{2}AD\times 2\,AB\times\sin\left(\text{®}-B\hat{A}D\right)=AD\times AB\times\sin\left(B\hat{A}D\right)$

إذن : $S(ABD)=\frac{1}{2}S(AA'D')$ ، و بنفس الطريقة نبين أن : $S(DBC)=\frac{1}{2}S(CC'B')$

و أيضا : $S(ABC)=\frac{1}{2}S(BB'A')$ و $S(ADC)=\frac{1}{2}S(DD'C')$

منه: $S(ABD)+S(DBC)=\frac{1}{2}S(AA'D')+\frac{1}{2}S(CC'B')$ أي : $S(ABCD)=\frac{1}{2}S(AA'D')+\frac{1}{2}S(CC'B')$

و أيضا: $S(ABC)+S(ADC)=\frac{1}{2}S(BB'A')+\frac{1}{2}S(DD'C')$ أي : $S(ABCD)=\frac{1}{2}S(BB'A')+\frac{1}{2}S(DD'C')$

بجمع المتساويتين الأخيرتين نجد: $2\,S(ABCD)=\frac{1}{2}S(AA'D')+\frac{1}{2}S(CC'B')+\frac{1}{2}S(BB'A')+\frac{1}{2}S(DD'C')$

أي : $2\,S(ABCD)=\frac{1}{2}\left(S(AA'D')+S(CC'B')+S(BB'A')+S(DD'C')\right)$

أي : $4\ S(ABCD)=S(AA'D')+S(CC'B')+S(BB'A')+S(DD'C')$

أي : $4\ S(ABCD)=S(A'B'C'D')-S(ABCD)$ ، بالتالي : $\boxed{5\ S(ABCD)=S(A'B'C'D')}$

تمرين صعب و يتطلب إلماما كبيرا بمساحة مثلث باستعمال صيغة جيب زاوية و كذا بعض خاصيات النسب المثلثية

الحلول المقترحة هي حلول شخصية و ليست حلولا رسمية