الجبر

مذكرة رقم 5 : الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- الترتيب والعمليات؛ - القيمة المطلقة وخاصياتها؛ - المجالات؛ - التأطير والتقريب، التقريبات العشرية.	- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين (أو تعبيرين) واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة؛ - تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي؛ - إدراك وتحديد تقريب عدد (أو تعبير) بدقة معلومة. إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية؛ - استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.	- إن توظيف الترتيب في مقارنة بعض الأعداد وفي إثبات بعض العلاقات يعتبر من المهارات التي ينبغي الحرص على تنميتها وتثبيتها، كما أن تأويل علاقات من الشكل $\|x-a\| \leq r$ وإنجاز بعض الإكبارات باستعمال المتفاوتات المثلثية وخاصيات القيمة المطلقة، من التقنيات الأساسية التي ينبغي تمرين التلاميذ على استعمالها بشكل تدريجي. - ينبغي ربط مفهوم القيمة المطلقة بالمسافة بين نقطتين على مستقيم مدرج. - يمكن تقديم الخصائص المتعلقة بتأطير وتقريب مجموع عددين أو فرق عددين في الحالة العامة أما تأطير وتقريب جداء وخارج عددين حقيقيين فينبغي دراستها من خلال أمثلة عددية مختارة تبين للتلاميذ الاحتياطات التي ينبغي اتخاذها وشروط صحة الاستدلالات. - تعتبر الآلة الحاسبة أداة مساعدة في تناول المفاهيم السابقة (التأطير والتقريب...) غير أنه ينبغي التحقق من أن التلاميذ ملمون بالكتابة العلمية لعدد ومدركون أن الآلة الحاسبة تعطي في أغلب الأحيان تقريبا عشريا للنتيجة، لذا ينبغي إكساب التلاميذ التقنيات الخاصة بالآلة الحاسبة العلمية (الأولويات في العمليات، وظائف الملامس...)

I.الترتيب و العمليات:

1)تعاريف : ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b و نكتب $a \leq b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^{+}$
2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b و نكتب $a \geq b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^{+}$
3. نقول إن a أصغر قطعا من b و نكتب $a \prec b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$
4. نقول إن a أكبر قطعا من b و نكتب $a \succ b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

ملحوظة : a و b عددان حقيقيان.

- $a \leq b$ يكافئ $a \prec b$ أو $a = b$
- مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية: $a = b \ , \ a \succ b \ , \ a \prec b$

أمثلة: $\sqrt{5} \prec 3 \ , -7 \prec -\frac{1}{3} \ , \pi \succ 2,14$

مثال : قارن بين $\frac{101}{102}$ و $\frac{100}{101}$

الجواب:

نحسب الفرق : $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{101\times101-100\times102}{101\times102}=\frac{10201-10200}{101\times102}$

اذن : $\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{1}{101\times102} \in \mathbb{R}^{+}$ ومنه $\frac{101}{102} \geq \frac{100}{101}$

تمرين1 : قارن : a و b و نضع $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$

الجواب:

لدينا $a-b = 2-\sqrt{3}$, و بما أن $2-\sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعا

أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ فان: $a \succ b$

تمرين2: $a \in \mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

الجواب : $(a^2+1)-2a = a^2-2a+1 = (a-1)^2 \geq 0$

ومنه $a^2+1 \geq 2a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

2)خاصيات : لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية: إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فان $a \leq c$

ملحوظة: إذا كان $a \leq b$ و $b \prec c$ فان $a \prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة و مع نقس العدد b.

مثال : لدينا : $\frac{30}{31} \prec 1$ و $1 \prec \frac{114,01}{114}$ و منه فان: $\frac{30}{31} \prec \frac{114,01}{114}$

خاصية الترتيب و الجمع:

$a \leq b$ يكافئ $a+c \leq b+c$

- إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فان $a+c \leq b+d$
- إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فان $a+b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c \succ 0$, فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$
- إذا كان $c \prec 0$ فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$
- إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فان $0 \leq ac \leq bd$
- إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فان $a+b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab \succ 0)$

$a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

إذا كان $a \leq b$ و $c \prec d$ فان $a+c \prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

$a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$ و $a \leq b$ يكافئ $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

لكل a من $\mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\leq$ بأحد الر موز: $\geq$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فان $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$

تمرين3 : قارن العددين: $a = \sqrt{6}$ و $b = \sqrt{3}+\sqrt{2}-1$

الجواب: نحسب الفرق :

$a-b=\sqrt{6}-(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)=\sqrt{3\times2}-(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$

$a-b=\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}\times(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)$ التعميل ب $\sqrt{3}$

$a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)$ التعميل ب $(\sqrt{2}-1)$

لدينا : $1<\sqrt{2}$ لأن : $(\sqrt{2})^2=2$ و $(1)^2=1$ ومنه $(\sqrt{2}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $1<\sqrt{3}$ لأن : $(\sqrt{3})^2=3$ و $(1)^2=1$ ومنه $(\sqrt{3}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي : $a>b$

تمرين4 : قارن العددين: $a=\sqrt{10}$ و $b=\sqrt{5}+\sqrt{2}-1$

الجواب: نحسب الفرق :

$$a-b=\sqrt{10}-(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)=\sqrt{5\times2}-(\sqrt{5}+\sqrt{2}-1)$$

$a-b=\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+1=\sqrt{5}\times(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)$ التعميل ب $\sqrt{5}$

$a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}-1)$ التعميل ب $(\sqrt{2}-1)$

لدينا : $1<\sqrt{2}$ لأن : $(\sqrt{2})^2=2$ و $(1)^2=1$ ومنه $(\sqrt{2}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا : $1<\sqrt{5}$ لأن : $(\sqrt{5})^2=5$ و $(1)^2=1$ ومنه $(\sqrt{5}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي: $a>b$

تمرين5 : قارن العددين: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

الجواب: نحسب الفرق : $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(2\sqrt{3}+2-(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\right)-\left((\sqrt{3})^2-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1\right)}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{3\sqrt{3}-5}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}-5}{2}$$

لدينا : $3\sqrt{3}>5$ لأن : $(3\sqrt{3})^2=27$ و $(5)^2=25$ ومنه

$3\sqrt{3}-5\in\mathbb{R}^{+*}$

ومنه : $\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\in\mathbb{R}^{+*}$ وبالتالي : $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}>\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

تمرين6 : ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}_+^*$.

نضع: $x=\frac{7a+2b}{7a}$ و $y=\frac{8b}{7a+2b}$ قارن العددين x و y .

الجواب: نحسب الفرق : $x-y=\frac{7a+2b}{7a}-\frac{8b}{7a+2b}$

$$x-y=\frac{(7a+2b)^2-7a\times8b}{7a(7a+2b)}=\frac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y=\frac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)}=\frac{(7a)^2-2\times7a\times2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$x-y=\frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)}\in\mathbb{R}^+$ لأن: $(7a-2b)^2\in\mathbb{R}^+$ و $7a(7a+2b)\in\mathbb{R}^+$

وبالتالي : $x\ge y$

تمرين7 : ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^+$.

1. قارن العددين: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$
2. استنتج مقارنة العددين: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ و $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$.

الجواب:(1) x عنصرا من $\mathbb{R}^+$ يعني $x\ge0$

لدينا $x+2\ge x$ لأن : $(x+2)-x\ge0$

اذن : $\sqrt{x+2}\ge\sqrt{x}$ واضافة $\sqrt{x+1}$ نجد النتيجة المطلوبة:

أي أن : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2)الاستنتاج :

بضربنا في المرافق نجد المتساوية التالية :

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

أي أن :

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$$

ولدينا أيضا : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

أي أن : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

وبما أن : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\ge\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ فان :

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\le\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

اذن نستنتج أن : : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\le\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

تمرين8 : ليكن x عددا حقيقيا موجبا.

قارن العددين: x و $2\sqrt{x}-1$.

الجواب: $x-(2\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\times1+1^2=(\sqrt{x}-1)^2\ge0$

ومنه $x\ge(2\sqrt{x}-1)$ مهما يكن : $x\in\mathbb{R}^+$

تمرين9 : ليكن n عددا صحيحا طبيعيا.

نضع: $a=\sqrt{4n^2+1}$ و $b=2n+1$ قارن العددين a و b .

الجواب: لمقارنة عددين موجبين نقارن مربعيهما

$$a^2=(\sqrt{4n^2+1})^2=4n^2+1$$

$$b^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$$

$$b^2-a^2=4n^2+4n+1-(4n^2+1)=4n^2+4n+1-4n^2-1$$

$$b^2-a^2=4n\ge0$$

ومنه $b^2\ge a^2$ اذن نستنتج أن $b\ge a$ مهما يكن : $x\in\mathbb{N}$

تمرين10 : ليكن x و y عددين حقيقي بحيث: $x<y<3$

1. بين أن: $x+y-6\prec0$.
2. قارن العددين $a=x^2-6x+1$ و $b=y^2-6y+1$.

الجواب:

1)لدينا $x<y<3$ اذن $x<3$ و $y<3$ ومنه $x+y<6$

وبالتالي: $x+y-6<0$

2): نحسب الفرق : $a-b=(x^2-6x+1)-(y^2-6y+1)$

$$a-b=x^2-6x+1-y^2+6y-1=x^2-y^2-6x+6y$$

$$a-b=(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$$

لدينا $x<y$ اذن $x-y\in\mathbb{R}^-$ وسبق أن وجدنا أن $x+y-6\in\mathbb{R}^-$

ومنه $(x-y)(x+y-6)\in\mathbb{R}^+$ أي : $a-b\in\mathbb{R}^+$ وبالتالي: $a\ge b$

II.المجالات و التأطير:

1)المجالات: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$.
ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.

المجالات المحدودة

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a \le x \le b$
$]a,b]$	$a \prec x \le b$
$[a,b[$	$a \le x \prec b$
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$

المجالات غير المحدودة:

لمجال	المتفاوتة
$]b,+\infty[$	$x \succ b$
$[b,+\infty[$	$x \ge b$
$]-\infty,a]$	$x \le a$
$]-\infty,a[$	$x \prec a$

مصطلحات: الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين
- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$ و $\mathbb{R}^*_+ =]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^*_- =]-\infty,0[$

تمرين 11: بعد التمثيل على مستقيم للمجالين I و J
حدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية
1) $J = [-1,+\infty[$ و $I =]-3,7]$
2) $J = [4;10]$ و $I =]-\infty,5[$
3) $J = [-5;-1]$ و $I = [0,10[$
4) $J = \left]-1,\frac{3}{2}\right[$ و $I = \left[\frac{-2}{3},2\right]$

الجواب:
1) $I \cap J =]-1,7]$ $\quad I \cup J =]-3;+\infty[$
2) $I \cap J = [4,5[$ $\quad I \cup J =]-\infty;10]$
3) $I \cap J = \varnothing$ $\quad I \cup J = [-5;10]$
4) $I \cap J = \left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ $\quad I \cup J =]-1,2]$

تمرين 12 : حل في IR النظمات الآتية

1) $\begin{cases} x \rangle 5 \\ x \le 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \ge -3 \\ x \rangle 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \rangle 7 \\ x \ge 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -3 \le x \le 0 \\ -7 \langle x \langle 10 \end{cases}$

الجواب: الرمز $\{$ يعني التقاطع

1) $x \rangle 5$ يعني $x \in]5,+\infty[$
$x \le 4$ يعني $x \in]-\infty,4]$
$S =]5,+\infty[\cap]-\infty,4] = \varnothing$

2) $x \ge -3$ يعني $x \in [-3,+\infty[$
$x > 2$ يعني $x \in]2,+\infty[$
$S =]2,+\infty[\cap [-3,+\infty[=]2,+\infty[$

3) $x > 7$ يعني $x \in]7,+\infty[$
$x \ge 0$ يعني $x \in [0,+\infty[$
$S =]7,+\infty[\cap [0,+\infty[=]7,+\infty[$

4) $-7 \langle x \langle 10$ يعني $x \in]-7;10[$
$-3 \le x \le 0$ يعني $x \in [-3;0]$
$S =]-7,10[\cap [-3;0] = [-3;0]$

2)تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.
تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a \prec b$
بحيث: $a \le x \le b$ أو $a \le x \prec b$ أو $a \prec x \le b$ أو $a \prec x \prec b$.
العدد الحقيقي الموجب قطعا $b-a$ يسمى سعة التأطير و العددان a و b هما محدات التأطير.

تمرين 13: نضع $x \in [1;3]$ و $y \in [2;4]$ اعط تأطيرا للأعداد التالية
1)اعط تأطيرا للأعداد التالية : x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$ و $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ و $\frac{x}{y}$
2)حدد سعة التأطير لكل من A و B : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و $B = \frac{2x-1}{x+1}$

الجواب:1) $x \in [1;3]$ يعني $1 \le x \le 3$
$y \in [2;4]$ يعني $2 \le y \le 4$
$1 \le x \le 3$ يعني $1^2 \le x^2 \le 3^2$ يعني $1 \le x^2 \le 9$
$2 \le y \le 4$ يعني $2^2 \le y^2 \le 4^2$ يعني $4 \le y^2 \le 16$
$1 \le x \le 3$ يعني $2 \times 1 \le 2x \le 2 \times 3$ يعني $2 \le 2x \le 6$
$2 \le y \le 4$ يعني $3 \times 2 \le 3 \times y \le 3 \times 4$ يعني $6 \le 3y \le 12$
$1 \le x \le 3$ يعني $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{1}$ يعني $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le 1$
$2 \le y \le 4$ يعني يعني $\frac{1}{4} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$
لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$: اذن $1 \times \frac{1}{4} \le x \times \frac{1}{y} \le 3 \times \frac{1}{2}$ اذن : $\frac{1}{4} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$
2)تأطير A : $6 \le 3y \le 12$ يعني $-12 \le -3y \le -6$
وحسب النتائج السابقة وبجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:
$1+4+2-12 \le x^2+y^2+2x-3y \le 9+16+6-6$
وبالتالي : $-5 \le A \le 25$
وسعة التأطير هي : $r = 25-(-5) = 30$
تأطير B : $B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$
لدينا $1 \le x \le 3$ يعني $2 \le 2x \le 6$ يعني $2-1 \le 2x-1 \le 6-1$
يعني $1 \le 2x-1 \le 5$
لدينا $1 \le x \le 3$ يعني $2 \le x+1 \le 4$ يعني $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$
وبضرب المتفاوتتين التاليتين $1 \le 2x-1 \le 5$ و $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$ طرف لطرف نجد
$1 \times \frac{1}{4} \le (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \le 5 \times \frac{1}{2}$ يعني $\frac{1}{4} \le B \le \frac{5}{2}$
وسعة التأطير هي : $r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

تمرين14 : التأطير و العمليات

1. تحقق من أن: $14^2 < 200 < 15^2$

ثم استنتج أن: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2. بنفس الطريقة أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{5}$.

3. استنتج تأطيرا للعددين $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.

الجواب:

1) لدينا $14^2=196$ و $15^2=225$ ومنه $14^2<200<15^2$

لدينا $14^2<200<15^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{200}<\sqrt{15^2}$

اذن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{2\times100}<\sqrt{15^2}$ أي : $14<\sqrt{2}\times10<15$

أي : $14\times\frac{1}{10}<\sqrt{2}\times10\times\frac{1}{10}<15\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $1,4<\sqrt{2}<1,5$

2) لدينا $22^2=484$ و $23^2=529$ ومنه $22^2<500<23^2$

لدينا $22^2<500<23^2$ اذن نستنتج أن : $\sqrt{22^2}<\sqrt{500}<\sqrt{23^2}$

اذن : $\sqrt{14^2}<\sqrt{2\times100}<\sqrt{15^2}$ أي : $22<\sqrt{5}\times10<23$

أي : $22\times\frac{1}{10}<\sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10}<23\times\frac{1}{10}$

اذن نستنتج أن : $2,2<\sqrt{5}<2,3$

3) لدينا $1,4<\sqrt{2}<1,5$ و $2,2<\sqrt{5}<2,3$

اذن : $1,4+2,2<\sqrt{2}+\sqrt{5}<1,5+2,3$ أي :

$3,6<\sqrt{2}+\sqrt{5}<3,8$

و أيضا بضرب طرف لطرف نجد: $1,4\times2,2<\sqrt{2}\times\sqrt{5}<1,5\times2,3$

أي : $3,08<\sqrt{10}<3,45$

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

1) القيمة المطلقة لعدد حقيقي:

1. إذا كان $x\ge0$ فان: $|x|=x$
2. إذا كان $x\le0$ فان: $|x|=-x$

أمثلة : $|3|=3$ و $\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$ و $|1-\sqrt{3}|=-(1-\sqrt{3})=-1+\sqrt{3}$

$|3-\sqrt{5}|=3-\sqrt{5}$ و $|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4$

تمرين15: القيمة المطلقة لعدد حقيقي

أكتب بدون رمز القيمة المطلقة الأعداد التالية:

1) $|\sqrt{2}-2|$ 2) $|3-2\sqrt{3}|$ 3) $|\sqrt{5}-\sqrt{2}|$

4) $A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|+|9-5\sqrt{3}|$

الجواب:

1) لدينا $\sqrt{2}<2$ اذن : $\sqrt{2}-2\in\mathbb{R}^-$ ومنه

$|\sqrt{2}-2|=-(\sqrt{2}-2)=-\sqrt{2}+2$

2) لدينا $3<2\sqrt{3}$ لأن : $3^2<(2\sqrt{3})^2$

اذن : $3-2\sqrt{3}\in\mathbb{R}^-$ ومنه $|3-2\sqrt{3}|=-(3-2\sqrt{3})=-3+2\sqrt{3}$

3) لدينا $\sqrt{5}>\sqrt{2}$ اذن : $\sqrt{5}-\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$ ومنه

$|\sqrt{5}-\sqrt{2}|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

4) $A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|+|9-5\sqrt{3}|$

$A=4-2\sqrt{3}--(5-3\sqrt{3})+(5\sqrt{3}-9)$

$A=4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-9=0$

2) خاصيات:

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $|x|\ge0$ و $|x^2|=|x|^2=x^2$ و $-|x|\le x\le|x|$.

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x|=|-x|$ و $\sqrt{x^2}=|x|$.

• لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|xy|=|x||y|$, $|x+y|\le|x|+|y|$

• إذا كان $y\neq0$ فان: $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$.

• لكل a من $\mathbb{R}^*$ $|x|=a$ يكافئ $x=a$ أو $x=-a$.

• لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x|=|y|$ يكافئ $x=y$ أو $x=-y$.

تمرين16 :

1. أحسب : $(3\sqrt{2}-5)^2$
2. قارن العددين: $3\sqrt{2}$ و 5
3. بسط : $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

الجواب: 1) $(3\sqrt{2}-5)^2=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=18-30\sqrt{2}\times5+25$

$(3\sqrt{2}-5)^2=(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=43-30\sqrt{2}$

2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما : $(3\sqrt{2})^2=18$ و $(5)^2=25$

اذن $3\sqrt{2} < 5$ ومنه $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}=|3\sqrt{2}-5|$

$=-(3\sqrt{2}-5)$ لأن : $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

وبالتالي: $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}+5$

خاصية : ليكن x من $\mathbb{R}$ و r من $\mathbb{R}_+^*$.

• $|x|\le r$ يكافئ $-r\le x\le r$

• $|x|\ge r$ يكافئ $x\ge r$ أو $x\le -r$

تطبيقات :(حل المعادلات)

تمرين17 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : 1) $|x-1|=5$

2) $|x+2|=-1$ 3) $|2x+1|=|x-3|$

الجواب: 1) $|x-1|=5$ يعني $x-1=5$ أو $x-1=-5$

يعني $x=6$ أو $x=-4$ اذن : $S=\{-4;6\}$

2) المعادلة : $|x+2|=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن القيمة المطلقة دائما موجبة

اذن : $S=\varnothing$

3) $|2x+1|=|x-3|$ يعني $2x+1=x-3$ أو $2x+1=-(x-3)$

يعني $x=-4$ أو $2x+1=-x+3$ يعني $x=-4$ أو $x=\frac{2}{3}$

اذن : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

تطبيقات :(حل المتراجحات)

تمرين18: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : 1) $|x-1|\le2$

2) $|x+2|\ge3$ 3) $|2x+1|<6$

الجواب: 1) $|x-1|\le2$ يعني $-2\le x-1\le2$ يعني

$-2+1\le x-1+1\le2+1$ يعني $-1\le x\le3$

اذن : $S=[-1;3]$

2) $|x+2|\ge3$ يعني $x+2\ge3$ أو $x+2\le-3$

يعني $x\ge1$ أو $x\le-5$ يعني $x\in[1;+\infty[$ أو $x\in]-\infty;-5]$

اذن : $S=]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[$

3) $|2x+1|<6$ يعني $-6<2x+1<6$ يعني $-6-1<2x+1-1<6-1$

يعني $-7<2x<5$ يعني $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$

يعني $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$ اذن : $S=\left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

تمرين19: توظيف القيمة المطلقة

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x\ge\frac{1}{2}$ و $y\le1$ و $x-y=3$.

1. أحسب قيمة العدد E حيث: $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$
2. بين أن: $\frac{1}{2}\le x\le4$ و أن $-\frac{5}{2}\le y\le1$
3. أحسب قيمة F حيث: $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

الجواب: 1) $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=|2x-1|+|2y-2|$

لدينا $x\ge\frac{1}{2}$ يعني $2x\ge1$ يعني $2x-1\ge0$

ولدينا $y\le1$ يعني $2y\le2$ يعني $2y-2\le0$

ومنه : $E=|2x-1|+|2y-2|=2x-1-(2y-2)$

$E=2x-2y+1=2(x-y)+1$ ونعلم أن: $x-y=3$

ومنه : $E=2\times3+1=7$

2)- نبين أن: $-\frac{5}{2}\le y\le1$

نعلم أن: $x-y=3$ اذن : $x=y+3$

ولدينا $x\ge\frac{1}{2}$ اذن : $y+3\ge\frac{1}{2}$ اذن : $y\ge\frac{1}{2}-3$

اذن : $y\ge\frac{-5}{2}$ وبما أن $y\le1$ فان: $-\frac{5}{2}\le y\le1$

- نبين أن: $\frac{1}{2}\le x\le4$

نعلم أن: $x-y=3$ اذن : $y=x-3$

ووجنا سابقا أن : $-\frac{5}{2}\le y\le1$

اذن : $-\frac{5}{2}\le x-3\le1$ يعني $-\frac{5}{2}+3\le x-3+3\le1+3$

ومنه: $\frac{1}{2}\le x\le4$

3)حساب قيمة العدد F حيث: $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

نبحث عن اشارة $x+y-5$

ووجنا سابقا أن : $-\frac{5}{2}\le y\le1$ و أن $\frac{1}{2}\le x\le4$

اذن: $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\le x+y\le1+4$ يعني $-2\le x+y\le5$

يعني $-2-5\le x+y-5\le5-5$ يعني $-7\le x+y-5\le0$

أي أن : $x+y-5$ سالب

نبحث عن اشارة $x+y+2$

وجنا سابقا أن : $-2\le x+y\le5$

يعني $-2+2\le x+y+2\le5+2$ يعني $0\le x+y+2\le7$

أي أن : $x+y+2$ موجب

اذن : $F=|x+y-5|+|x+y+2|=-(x+y-5)+x+y+2$

اذن : $F=-x-y+5+x+y+2=-x-y+5+x+y+2=7$

تعاريف أخرى : ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}$ بحيث: $a\prec b$

$b-a$ تسمى طول أو سعة المجال $[a,b]$.

العدد $c=\frac{a+b}{2}$ يسمى مركز المجال $[a,b]$ و العدد $c=\frac{b-a}{2}$ يسمى شعاع المجال $[a,b]$.

و منه $x\in[a,b]$ يكافئ $|x-c|\le r$ يكافئ $c-r\le x\le c+r$.

مثال: من أجل المجال $[-2,10]$ لدينا: العدد $10-(-2)=12$ هو طوله والعدد $c=\frac{10-2}{2}=4$ هو مركزه و العدد $r=\frac{12}{2}=6$ هو شعاعه

إذن: $x\in[-2;10]$ يكافئ $|x-4|\le6$.

IV.التقريبيات والتقريبات العشرية:

1)التقريبات: تعاريف: ليكن a و x عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.

1. إذا كان $a\le x\le a+r$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتفريط.
2. إذا كان $a-r\le x\le a$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.
3. إذا كان $|x-a|\le r$, نقول إن a قيمة مقربة (أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r.

خاصية: إذا كان $a\le x\le b$ تأطيرا للعدد x فان:

- العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بتفريط. و العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بإفراط.
- العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال1: من التأطير $2,645\le\sqrt{7}\le2,646$ نستنتج أن:

o العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.

o العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

o العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتفريط.

مثال2: لدينا $\pi=3,1415926.....$

سؤال: حدد قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-2} بتفريط و بإفراط

تمرين20: التقريب العشري لعدد

أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط (استعمل المحسبة).

$(\sqrt{10}\simeq3.16227766)$

الجواب: $3.162<\sqrt{10}<3.163$

ولدينا : $3.163-3.162=0.001=10^{-3}$ اذن

- العدد 3.162 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
- العدد 3.163 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

2)التقريب العشري لعدد حقيقي:

الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث: $p\le x\le p+1$, p يسمى الجزء الصحيح للعدد x و نكتب: $E(x)=p$

مثال: لدينا: $1\le\sqrt{2}\le2$ و منه فان $E(\sqrt{2})=1$

تمرين21 أو مثال: أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-4} بتفريط (استعمل المحسبة).علما أن : $(\sqrt{3}\simeq1.732050808...)$

الجواب: لدينا: $1,732\le\sqrt{3}\prec1,733$

أي $(1732)\cdot10^{-3}\le\sqrt{3}\prec(1732+1)\cdot10^{-3}$

إذن: $1,732$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.

و $1,733$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.