

(e) إذا كانت التجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين ولهما منحيان متعاكسان فإن :  

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

(f)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  تكافئ  $\vec{u} \perp \vec{v}$

(g)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (\*)

(\*)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

(\*)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$

(\*)  $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(\*)  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

(\*)  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

(\*)  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

### (III) تطبيقات الجداء السلمي

#### (1) علاقة الكاشي .

ليكن  $(ABC)$  مثلثا لدينا :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$$

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B}$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos \hat{C}$$

#### (2) مبرهنة المتوسط

ليكن  $(ABC)$  مثلثا و  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$

$$\text{لدينا : } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\text{أو } AI^2 = \frac{1}{2} \left( AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2} \right)$$

#### (3) العلاقات المترية في مثلث قائم الزاوية .

(a) ليكن  $(ABC)$  مثلثا قائم الزاوية في  $A$  و  $A'$  منتصف  $[BC]$  و  $H$

المسقط العمودي لـ  $A$  على  $(BC)$  . لدينا :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (*) \quad (\text{علاقة فيثاغورس})$$

$$BA^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} = BH \cdot BC \quad (*)$$

$$CA^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CB} = CH \cdot CB \quad (*)$$

$$AH^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HC} = HB \cdot HC \quad (*)$$

$$AA' = \frac{1}{2} BC \quad (*)$$

(b) ليكن  $(ABC)$  مثلثا قائم الزاوية في  $A$  . لدينا :

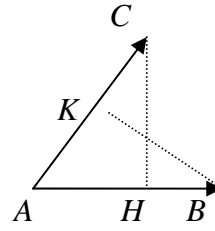
$$\cos \hat{B} = \frac{AC}{BC} \quad \cos \hat{B} = \frac{BA}{BC}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

(c) ليكن  $(ABC)$  مثلثا . لدينا :

$$\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}$$

### (I) تعريف



(1) ليكن  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$  متجهتين غير متعامدتين .

ليكن  $H$  المسقط العمودي لـ  $C$  على  $(AB)$

و  $K$  المسقط العمودي لـ  $B$  على  $(AC)$

نسمي الجداء السلمي للمتجهتين  $\overrightarrow{AC}$  و  $\overrightarrow{AB}$

العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  والمعرف بما يلي :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

$$= \overline{AC} \cdot \overline{AK}$$

$$= AB \cdot AC \cdot \cos(\hat{BAC})$$

(2) إذا كانت إحدى المتجهتين  $\overrightarrow{AB}$  أو  $\overrightarrow{AC}$  فإن  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

### (II) خاصيات

(1) ليكن  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  متجهتين غير متعامدتين .

ليكن  $C'$  المسقط العمودي لـ  $C$  على  $(AB)$

ليكن  $D'$  المسقط العمودي لـ  $D$  على  $(AB)$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{C'D'}$$

ملاحظة :

من اجل حساب  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$  نسقط إحدى المتجهتين على الأخرى ونمر من التجهتين إلى القياس الجبري ، مع الاحتفاظ بالنقط التي أسقطنا عليها ، ونعرض النقط التي أسقطناها بمساقطها .

(2a) نرمز لـ  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$  بالرمز  $\overline{AB}^2$  ويسمى المربع السلمي .

$$\text{(b) لدينا } \overline{AB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$$

(3a) إذا كانت التجهتان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  مستقيمتين ولهما نفس المتحى فإن :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

(b) إذا كانت التجهتان  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  مستقيمتين ولهما منحيان متعاكسان فإن :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

(4a) نقول إن التجهتين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  متعامدتان إذا فقط إذا كان كـ المستقيمان

$(AB)$  و  $(CD)$  متعامدين . ونكتب  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

(b) لدينا  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$  تكافئ  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$

(5) إذا كانت النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  مستقيمية فإن

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

(6a) ليكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين وليكن  $A$  و  $B$  و  $C$  3 نقط بحيث

$$\overline{AC} = \vec{v} \quad \overline{AB} = \vec{u}$$

$$\text{لدينا : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

(b) ليكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين غير متعامدتين :

$$\text{لدينا } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\hat{u}, \vec{v})$$

$$\text{(c) } \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

(d) إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين ولهما نفس المتحى فإن :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$