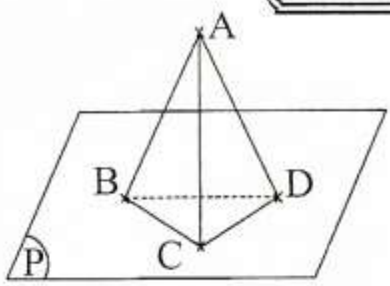
تمارين وحلولها

تمرين 1 :

(P) مستوى في الفضاء ($\mathscr{E}$) حيث B و C و D ثلاث نقط غير مستقيمية من (P) و $A \notin (P)$

أنشئ الشكل ثم حدد المستويات الموجودى في الشكل.

الجواب :



وبماأن B و C و D من المستوى (P) و $A \notin (P)$

فإن النقط A و B و C و D غير مستوائية

إذن A و B و C و D تحدد رباعي الاوجه.

لدينا أربع مستويات وهي :

(BCD) و (ACD) و (ABD) و(ABC)

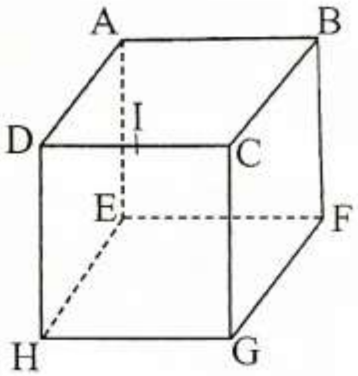
تمرين 2 :

ABCDEFGH مكعبا و I منتصف القطعة [DC]

1 - هل النقطة I تنتمي إلى المستوى(ABC)؟ علل جوابك

2 - بين أن النقط E و H و C و B مستوائية

الجواب :



1 - لدينا ABCD مربع إذن $(AB)/\!/(DC)$

ومنه A و B و C و D مستوائية

إذن : $(DC) \subset (ABC)$

وبما أن $I \in [DC]$ فإن $I \in (ABC)$

2 - لدينا $(AD)/\!/(BC)$ لأن ABCD مربع

و $(AD)/\!/(EH)$ لأن ADHE مربع

إذن $(EH)/\!/(BC)$

ومنه النقط E و H و C و B مستوائية

تمرين 3 :

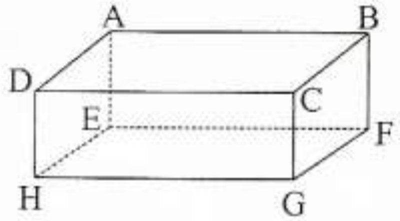
نعتبر متوازي المستطيلات القائم حيث قياسات أضلاعه هي على التوالي : 1cm، 2cm، 3cm

1) - ما هو قياس قطر متوازي المستطيلات ؟

2) - ما هو ضلع مكعب حيث قطر هذا المكعب يساوي قطر متوازي المستطيلات السابق.

الجواب :

1)



لدينا AG قطر متوازي المستطيلات

لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 3^2 + 1^2$

$= 10$

$AC^2 = 10$

لدينا كذلك حسب مبرهنة فيتاغورس :

$AG^2 = AC^2 + CG^2$

$= 10 + 2^2$

$= 14$

إذن : $\boxed{AG = \sqrt{14}}$

2) ليكن a ضلع المكعب

إذن قطر المكعب هو : $a\sqrt{3}$

لدينا : $a\sqrt{3} = \sqrt{14}$

إذن $a = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$

$a = \frac{\sqrt{42}}{3}$

إذن ضلع المكعب هو : $\frac{\sqrt{42}}{3}$ cm

تمرين 4 :

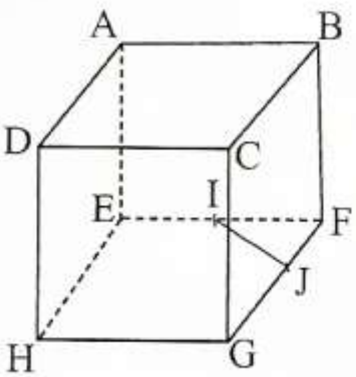
نعتبر ABCDEFGH مكعبا و I منتصف القطعة [EF] و J منتصف القطعة [FG]

1) - هل النقط I و J و F و D مستوائية ؟ (علل جوابك).

2) - بين أن النقط A و C و G و E مستوائية

الجواب :

1)



لدينا $I \in (EF)$ و $J \in (FG)$

إذن النقطتان I و J تنتميان إلى المستوى (EFGH)

ولدينا $D \notin (EFGH)$

إذن النقط I و J و F و D غير مستوائية

2) لدينا $(AE) /\!/ (BF)$

و $(BF) /\!/ (CG)$

إذن $(AE) /\!/ (CG)$ ①

ولدينا $AE = BF$

و $CG = BF$

إذن $AE = CG$ ②

من ① و ② نستنتج أن ACGE متوازي الاضلاع

ومنه $(AC)//(EG)$

إذن النقط A و C و G و E مستوائية.

تمرين 5 :

ليكن ABCD رباعي أوجه

I و J و K نقط من [AB] و [AC] و [AD]

على التوالي بحيث

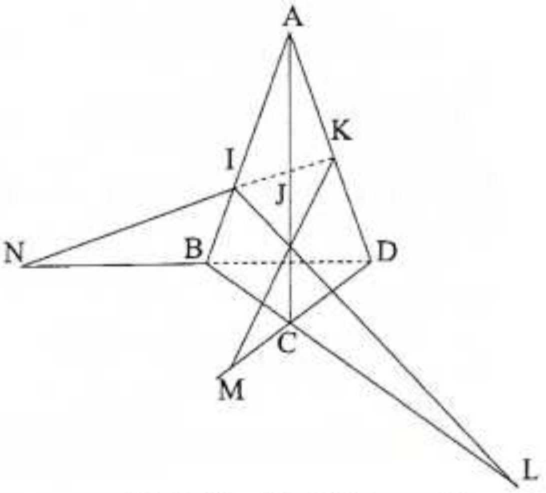
(IJ) يقطع (BC) في L

(JK) يقطع (CD) في M

(IK) يقطع (BD) في N

1 - بين أن النقط L و M و N مستقيمية

الجواب :



نعتبر المستويين (IJK) و (BCD)

لدينا $(IJK) \neq (BCD)$

و $\begin{cases} L\in (IJ) \\ (IJ)\subset (IJK) \end{cases}$ اذن $L\in (IJK)$

$\begin{cases} L\in (BC) \\ (BC)\subset (BCD) \end{cases}$ اذن $L \in (BCD)$

إذن(ILK) و (BCD) يتقاطعان وفق المستقيم

(Δ) يمر من L

كذلك لدينا

$\begin{cases} M \in (JK) \\ (JK)\subset (IJK) \end{cases}$ اذن $M\in (IJK)$

$\begin{cases} M\in (CD) \\ (CD)\subset (BCD) \end{cases}$ اذن $M\in (BCD)$

ومنه $M\in (IJK)\cap (BCD) = (\Delta)$

كذلك لدينا

$\begin{cases} N \in (IK) \\ (IK)\subset (IJK) \end{cases}$ اذن $N \in (IJK)$

$\begin{cases} N\in (BD) \\ (BD)\subset (BCD) \end{cases}$ اذن $N \in (BCD)$

ومنه $N \in (IJK)\cap (BCD) = (\Delta)$

ومنه L و M و N تنتمي إلى نفس المستقيم (Δ)

وبالتالي L ، M ، N نقط مستقيمية

تمرين 6 :

ليكن SABCD هرما قاعدته ABCD شبه

منحرف حيث (CD) يوازي (AB)

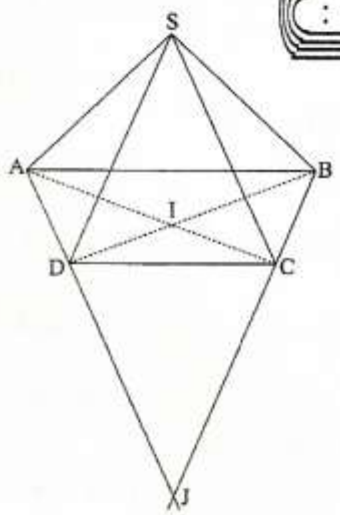
1 - حدد (Δ) تقاطع المستويين (SAC) و (SBD)

2 - حدد (Δ') تقاطع المستويين (SAB) و (SCD)

3 - حدد (Δ'') تقاطع المستويين (SAB) و(SCD)

الجواب :

①



لدينا $B \in (SBD)$ و $B \notin (SAC)$

اذن $(SAC) \notin (SBD)$ ①

لدينا $S \in (SBD)$ و $S \in (SAC)$

إذن $S \in (SAC) \cap (SBD)$ ②

لتكن I نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و(BD)

لدينا : $I \in (AC)$ و $(AC) \subset (SAC)$

فإن $I \in (SAC)$

لدينا $I \in (BD)$ و $(BD) \subset (SBD)$

اذن $I \in (SBD)$

ومنه $I \in (SAC) \cap (SBD)$ ③

إذن من ① و② و③ نستنتج أن

$(SAC) \cap (SBD) = (SI)$

② لدينا $A \in (SAB)$ و $A \notin (SCD)$

اذن $(SAB) \neq (SAD)$

لدينا $S \in (SAB) \cap (SCD)$

لدينا $(SCD) \cap (SAB) = (\Delta')$

و $(AB) // (AC)$

و$(AB) \subset (SAB)$ و $(CD) \subset (SCD)$

إذن : (Δ') هو المستقيم المار من S والموازي لـ (AB) و (CD)

③ لدينا $A \in (SAD)$ و $A \notin (SBC)$

اذن $(SBC) \neq (SAD)$ ①

لدينا كذلك $S \in (SBC) \cap (SAD)$ ②

لتكن J نقطة تقاطع المستقيمين(AD) و(BC)

إذن $J \in (AD)$ و $J \in (BC)$

ومنه $J \in (SAD)$ و $J \in (SBC)$

إذن $J \in (SBC) \cap (SAD)$ ③

من ① و② و③ نستنتج أن

$(SBC) \cap (SAD) = (SJ)$

تمرين 7 :

ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

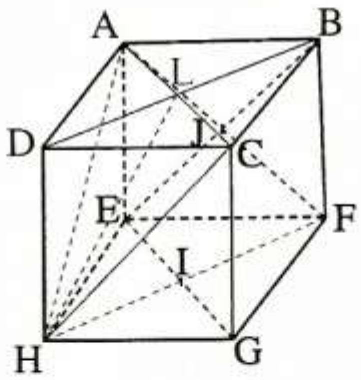
1 - حدد وانشئ المستقيم (Δ) تقاطع المستويين (ACH) و (BDF).

2 - ليكن I و J مركزا المربعين EFGH وABFE على التوالي

حدد المستقيم (Δ') تقاطع المستويين (IJE) و (ADH).

الجواب :

①



لدينا $A \in (ACH)$ و $A \notin (BDF)$

اذن $(ACH) \neq (BDF)$ ①

لدينا $H \in (ACH)$

بما أن $\begin{cases} DH = BF \\ (DH) \parallel (BF) \end{cases}$ فإن

الرباعي BDHF متوازي الاضلاع

ومنه B وD وH و F مستوائية

إذن $H \in (BDF)$

ومنه $H \in (BDF) \cap (ACH)$ ②

لتكن L نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و(BD)

إذن $L \in (ACH)$ و $L \in (BDF)$

ومنه $L \in (BDF) \cap (ACH)$ ③

إذن من ① و② و③ نستنتج أن

$(BDF) \cap (ACH) = (HL)$

② لدينا $I \in (IJE)$ و $I \notin (ADH)$

اذن $(IJE) \neq (ADH)$

لدينا $E \in (IJE)$ و $E \in (ADH)$

لأن : $(DH) \parallel (AE)$

إذن : $E \in (ADH) \cap (IJE)$

لدينا $\begin{cases} AB = HG \\ (AB) \parallel (HG) \end{cases}$ إذن

ABGH متوازي الأضلاع

ومنه $(AH) \parallel (BG)$

نعتبر المثلث EBG

لدينا I منتصف [EG]

J منتصف [AB]

إذن $(IJ) \parallel (BG)$

وبالتالي $(IJ) \parallel (AH)$

لدينا $\begin{cases} (IJ) \parallel (AH) \\ (IJ) \subset (IJE) \\ (AH) \subset (ADH) \\ (ADH) \cap (EJE) = (\Delta') \end{cases}$

إذن (Δ') هو المستقيم المار من E والموازي لـ (IJ) و(AH) .

تمرين 8 :

ABCD رباعي الاوجه . E و F منتصفا القطعتين [AB] و[DC] على التوالي و G مركز

ثقل المثلث ADC .

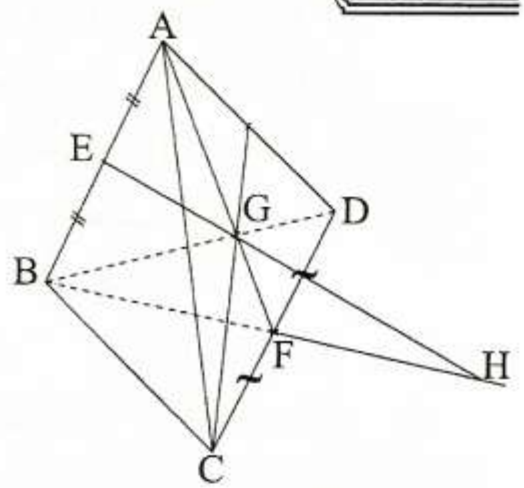
1 - أ - بين ان : (EG) و (BF) مستوائيان

-ب- بين ان : (EG) و(BF) متقاطعان في نقطة H .

-ج- استنتج تقاطع (EG) والمستوى (BCD) .

2 - حدد تقاطع المستويين (DEG) و(ABC)

الجواب :



1 - أ - نعتبر المستوى (ABF)

لدينا $E \in (AB)$ إذن $E \in (ABF)$

لدينا $G \in (AF)$ إذن $G \in (ABF)$

ومنه $(EG) \subset (ABF)$

ولدينا $(BF) \subset (ABF)$

إذن (EG) و (BF) مستوائيان

ب - نفترض أن : $(EG) \parallel (BF)$

لدينا $\frac{EA}{BA} = \frac{1}{2}$

ولدينا $\frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}$

بما أن $(EG) \parallel (BF)$ فإن

حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{EA}{BA} = \frac{AG}{AF}$$

أي أن $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ وهذا تناقض

إذن الافتراض خاطئ

ومنه (EG) و(BF) متقاطعان لأنهما مستوائيان .

ج- لدينا $(BF) \subset (BCD)$

و $H \in (BF)$

إذن $H \in (BCD)$

ولدينا $H \in (EG)$

إذن $H \in (EG) \cap (BCD)$

ولدينا $E \in (EG)$ و $E \notin (BCD)$

إذن تقاطع المستقيم (EG) والمستوى (BCD) هو النقطة H .

إذن : $(EG) \cap (BCD) = \{H\}$

2 - تحديد تقاطع المستويين (DEG) و(ABC)

لدينا $A \in (ABC)$ و $A \notin (DEG)$

اذن $(DEG) \neq (ABC)$ ①

لدينا $E \in (DEG)$ و $E \in (AB)$

إذن $E \in (ABC)$

إذن $E \in (ABC) \cap (DEG)$ ②

لتكن L منتصف القطعة [AC]

إذن $L \in (ABC)$

لأن $L \in (AC)$

لدينا (DL) متوسط في المثلث ACD

إذن G مركز ثقل المثلث ADC تنتمي إلى (DL).

ومنه $L \in (DL)$

وبالتالي $L \in (EDG)$

إذن $L \in (ABC) \cap (EDG)$ ③

إذن من ① و② و③ نستنتج أن

$(ABC) \cap (EDG) = (EL)$

تمرين 9 :

نعتبر $SABCD$ هرما قاعدته المستطيل $ABCD$

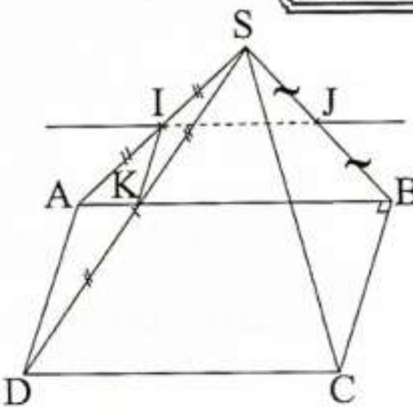
I وJ وK منتصفات القطع $[SA]$ و$[SB]$ و$[SD]$ على التوالي .

1 - بين ان : (IJ) يوازي (SDC)

2 - بين ان : (IK) يوازي (SBC)

3 - بين ان : $(ABC) \mathbin{/\mkern-6mu/} (IJK)$

الجواب :



1 - نعتبر المثلث SAB

لدينا I منتصف $[AS]$

J منتصف $[BS]$

إذن $(IJ) \mathbin{/\mkern-6mu/} (AB)$

لدينا $ABCD$ مستطيل إذن

$(AB) \mathbin{/\mkern-6mu/} (DC)$

ومنه $(IJ) \mathbin{/\mkern-6mu/} (DC)$

وبما أن $(DC) \subset (SDC)$

فإن $(IJ) \mathbin{/\mkern-6mu/} (SDC)$

2 - نعتبر المثلث SAD

لدينا I منتصف $[AS]$

K منتصف $[DS]$

إذن $(IK) \mathbin{/\mkern-6mu/} (AD)$

لدينا $ABCD$ مستطيل ومنه

$(AD) \mathbin{/\mkern-6mu/} (BC)$

وبالتالي $(BC) \mathbin{/\mkern-6mu/} (IK)$

وبما أن $(BC) \subset (SBC)$

فإن $(IK) \mathbin{/\mkern-6mu/} (SBC)$

لدينا (AB) و (AD) متقاطعان وضمن المستوى (ABC)

ولدينا $(IJ) \mathbin{/\mkern-6mu/} (AB)$ و $(IK) \mathbin{/\mkern-6mu/} (AD)$

و(IJ) و(IK) متقاطعان وضمن المستوى (IJK).

إذن $(IJK) \mathbin{/\mkern-6mu/} (ABC)$

تمرين 10 :

ليكن ABCDEFGH متوازي المستطيلات

1 - بين ان B و C و H و E نقط مستوائية.

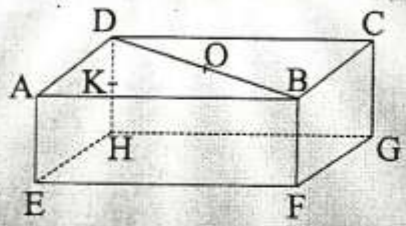
2 - بين ان : $(BE) \parallel (HC)$

3 - لتكن O منتصف $[BD]$ و K منتصف $[DH]$

بين ان : $(OK) \parallel (BCH)$

4 - علما أن $AB = 4$ و $AD = 3$ و $AE = 2$

احسب حجم متوازي المستطيلات ABCDEFGH.



الجواب :

1 - لدينا $(FG) \parallel (BC)$ لأن BCGF متوازي أضلاع.

كذلك $(EH) \parallel (FG)$ لأن EFGH متوازي أضلاع.

ومنه $(EH) \parallel (BC)$

وبالتالي (EH) و (HC) مستقيمان مستوائيان

إذن B و C و H و E نقط مستوائية.

2 - لدينا $(EH) \parallel (BC)$ و $EH = BC$

إذن BCHE متوازي أضلاع.

ومنه $(HC) \parallel (BE)$

3 - في المثلث DBH لدينا :

O منتصف $[BD]$

K منتصف $[DH]$

إذن $(OK) \parallel (BH)$

ولدينا $(BH) \subset (BCH)$

وبالتالي $(OK) \parallel (BCH)$

4 - حجم متوازي المستطيلات هو :

$$V = AB \cdot AD \cdot AE$$
$$= 2 \times 3 \times 4 = 24$$

تمرين 11 :

ليكن في الفضاء ABCD و ABEF متوازيا اضلاع لا يوجدان ضمن نفس المستوى.

1 - بين ان $(ADF) \parallel (BCE)$

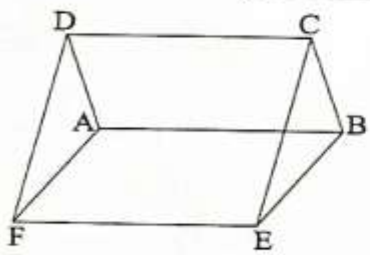
2 - أ - بين ان النقط E و F و C و D مستوائية

ب - بين أن (EC) يوازي (DF)

ج - استنتج طبيعة الرباعي CDEF

3 - حدد تقاطع المستويين (ACE) و (ADF)

الجواب :



1 - ABCD متوازي الاضلاع

إذن $(AD) \parallel (BC)$

لدينا ABEF متوازي الاضلاع

إذن $(AF) \parallel (BE)$

لدينا (AD) و (AF) متقاطعان وضمن المستوى (ADF).

لدينا كذلك (BC) و (BE) متقاطعان وضمن المستوى (BCE)

إذن $(ADF) \parallel (BCE)$

2 - أ -

لدينا ABCD متوازي الاضلاع

إذن $(DC) \parallel (AB)$

لدينا ABEF متوازي الاضلاع

إذن $(EF) \parallel (AB)$

ومنه $(EF) \parallel (DC)$

إذن النقط E و F و C و D مستوائية

ب -

لدينا $(ADF) \parallel (BCE)$

و $(EFDC) \cap (ADF) = (DF)$

$(EFDC) \cap (BCE) = (EC)$

ومنه : $(EC) \parallel (DF)$

حسب الخاصية " إذا توازى مستويان فإن كل مستوى ثالث يقطع أحدهما فهو يقطع الآخر وفق مستقيمين متوازيين "

ج- لدينا $\left\{\begin{array}{l}(DC) \parallel (EF) \\ (EC) \parallel (DF)\end{array}\right.$ إذن الرباعي CDEF متوازي الاضلاع

3 - لدينا $C \in (ACE)$

و $C \notin (ADF)$

اذن $(ACE) \neq (ADF)$

لدينا $A \in (ACE) \cap (ADF)$

لنضع : $(ACE) \cap (ADF) = (\Delta)$

ولدينا : $(FD) \subset (ADF)$

$(CE) \subset (ACE)$

و $(FD) \parallel (CE)$

إذن (Δ) هو المستقيم المار من A والموازي لـ (CE) و (FD)

إذن تقاطع المستويين (ACE) و (ADF) هو المستقيم المار من A والموازي لـ (CE) و (FD).

تمرين 12 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا والنقط M و I و N منتصفات القطع $[AE]$ و $[BF]$ و $[DH]$

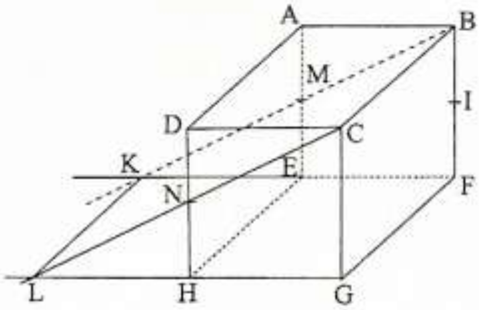
1 - بين أن المستقيم (BA) يقطع المستقيم (EF) في نقطة K وان المستقيم (CN) يقطع المستقيم (GH) في نقطة L.

2 - بين ان : (BC) يوازي (KL)

3 - حدد تقاطع المستويين (ADE) و (IMH)

4 - بين أن المستقيم (IH) يوازي المستوى (KLC)

الجواب :



1 - نعتبر المستوى ABEF

لدينا (AB) و(EF) و(MB) مستوائية

لدينا $(AB) // (EF)$

و (BM) يقطع (AB) في B

إذن (BM) يقطع (EF) في نقطة K .

نعتبر المستوى: DCGH

لدينا (DC) و(HG) و(CN) مستوائية

لدينا $(DC) // (HG)$ و (CN) يقطع (DC) في C إذن

(CN) يقطع (HG) في نقطة L

2 - النقط B و C و N و L و K و M مستوائية

لدينا $(ABCD) // (EFGH)$

و $(ABCD) \cap (BCLK) = (BC)$

$(EFGH) \cap (BCLK) = (KL)$

إذن $(BC) // (KL)$

3 - لدينا $A \in (ADE)$ و $A \notin (IMH)$

إذن ① $(IMH) \neq (ADE)$

لدينا M منتصف [AE] إذن $M \in (ADE)$

ولدينا $M \in (AMH)$

إذن ② $M \in (ADE) \cap (IMH)$

لدينا $(DH) // (AE)$ إذن $H \in (ADE)$

و $H \in (IMH)$

إذن ③ $H \in (ADE) \cap (IMH)$

إذن من ① و② و③ نستنتج أن

$(ADE) \cap (IMH) = (MH)$

4 - لدينا $(BI) // (NH)$ و $BI = NH$

إذن الرباعي BNHI متوازي الأضلاع

ومنه $(IH) // (NB)$

وبما أن $(NB) \subset (KLC)$

فإن $(IH) // (KLC)$

تمرين 13 :

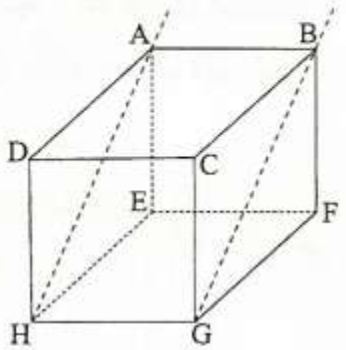
ليكن ABCDEFGH مكعبا

1 - بين أن $(HG) \perp (BF)$

2 - أ - بين أن $(AH) // (GB)$

ب - استنتج أن : $(DE) \perp (GB)$

الجواب :



1 - لدينا : EFGH مربع

إذن $(HG) \parallel (EF)$

لدينا : $ABEF$ مربع

إذن $(BF) \parallel (AE)$

و $(EF) \perp (AE)$ في النقطة E

إذن (HG) عمودي على (BF)

2 - أ -

لدينا $(HG) \parallel (EF)$ و $(EF) \parallel (AB)$

ومنه $(HG) \parallel (AB)$

لدينا كذلك : $HG = EF$

و $EF = AB$

إذن $HG = AB$

إذن $\left\{ \begin{array}{l} (HG) \parallel (AB) \\ HG = AB \end{array} \right.$ ومنه الرباعي

$ABGH$ متوازي الاضلاع

ومنه $(AH) \parallel (GB)$

ب -

لدينا $(AH) \perp (DE)$ لأنهما قطر المربع $ADHE$

ولدينا $(AH) \parallel (GB)$

إذن $(DE) \perp (GB)$

تمرين 14 :

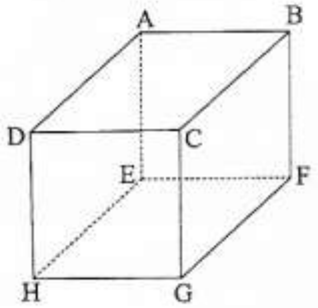
ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا في الفضاء

1) - بين أن $(ABF) \perp (HE)$

2) - أ - بين أن $(EB) \perp (AD)$

ب - استنتج أن : $(AFG) \perp (EB)$

الجواب :



1) - لدينا : $(HE) \perp (AE)$

لأن $ADHE$ مربع

$(HE) \perp (EF)$

لأن $HEFG$ مربع

لدينا كذلك : (AE) و (EF) متقاطعان في E

ضمن المستوى (ABF)

ومنه $(ABF) \perp (HE)$

2) - أ - لدينا $(ABF) \perp (HE)$

و $(HE) \parallel (AD)$

إذن $(AD) \perp (ABF)$

وبما أن $(EF) \subset (ABF)$

فإن $(AD) \perp (EB)$

ب - لدينا $(AFG) = (AFGD)$

لأن $(FG) \parallel (AD)$

لدينا : $(EB) \perp (AD)$ ①

لدينا : $(EB) \perp (AF)$ ②

لأن $[AF]$ و $[EB]$ قطرا المربع $ABFE$

لدينا (AD) و (AF) متقاطعان في A وضمن

المستوى (AFG) ③

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(AFG) \perp (EB)$

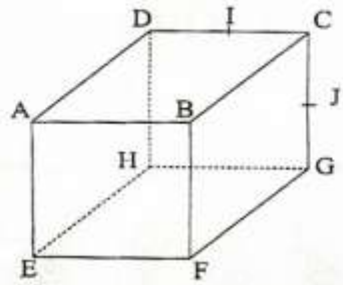
تمرين 15 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا.

I منتصف [CD] و J منتصف [CG]

1 - بين أن : $(IJ) \parallel (ABF)$

2 - أثبت أن : $(AD) \perp (IJ)$



الجواب :

1 - في المثلث DCG لدينا I منتصف [DC]

و لدينا J منتصف [CG]

إذن $(DG) \parallel (IJ)$ ①

ولدينا $(BC) \parallel (AD)$ و $(BC) \parallel (FG)$ إذن $(AD) \parallel (FG)$

ولدينا $AD = FG$

إذن الرباعي ADGF متوازي أضلاع

ومنه $(DG) \parallel (AF)$ ②

من ① و ② نستنتج أن $(IJ) \parallel (AF)$

ولدينا $(AF) \subset (ABF)$

وبالتالي : $(IJ) \parallel (ABF)$

2 - لدينا $(AD) \perp (DC)$

$(AD) \perp (DH)$

و (DC) و(DH) متقاطعان ضمن المستوى (HDC)

ومنه $(AD) \perp (HDC)$

ولدينا : $(IJ) \subset (HDC)$

إذن $(AD) \perp (IJ)$

تمرين 16 :

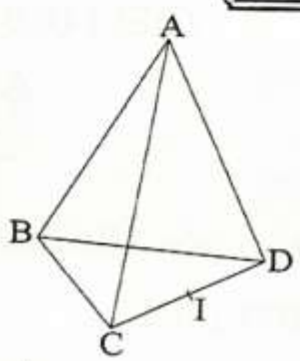
ليكن ABCD رباعي أوجه بحيث :

$AC = AD$ و $BC = BD$، I منتصف [CD]

1 - بين أن : $(CD) \perp (ABI)$

2 - استنتج أن : $(AB) \perp (CD)$

الجواب :



1 - المثلث ACD متساوي الساقين لأن $AC = AD$ رأسه A و I منتصف [CD]

إذن : $(AI) \perp (CD)$ ①

كذلك BCD متساوي الساقين لأن

BC = BD رأسه B و I منتصف [CD]

إذن : $(BI) \perp (CD)$ ②

ولدينا (BI) و(AI) متقاطعان ضمن المستوى (ABI)

ومنه $(CD) \perp (ABI)$

2 - لدينا : $(CD) \perp (ABI)$

و $(AB) \subset (ABI)$

إذن $(CD) \perp (AB)$

تمرين 17 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

1) - بين أن $(AE) \perp (BD)$

2) - بين أن $(BD) \perp (AEC)$

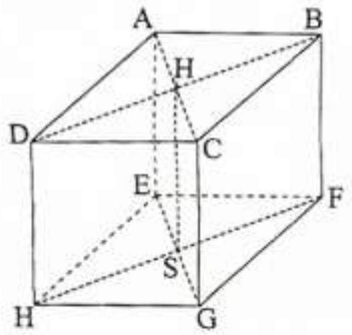
3) - ليكن S مركز المربع EFGH

و $AB = 3\ cm$

احسب حجم الهرم SABCD

4) - بين أن $(BDF) \perp (AEG)$

الجواب :



1) - لدينا : $(AE) \perp (AB)$

لأن ABFE مربع

$(AE) \perp (AD)$

لأن ADHE مربع

و (AB) و(AD) متقاطعان و ضمن المستوى (ABD) إذن $(AE) \perp (ABD)$

وبما أن $(BD) \subset (ABD)$

فإن : $(AE) \perp (BD)$

2) - لدينا : $(AE) \perp (BD)$

لأن ABCD مربع

إذن $(AC) \perp (BD)$

(AE) و (AC) متقاطعان و ضمن المستوى (ACE)

إذن $(BD) \perp (AEC)$

3) - ليكن H مركز المربع ABCD

إذن SH هو ارتفاع الهرم SABCD

إذن حجم الهرم SABCD هو :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABCD} \times SH$$

لدينا : $SH = AE$

ومنه $SH = 3\ cm$

لدينا $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 9\ cm^2$

ومنه $V = \frac{1}{\cancel{3}} \times 9 \times \cancel{3}\ cm^3$

$$\boxed{V = 9\ cm^3}$$

4) - لدينا $(AE) \parallel (CG)$

إذن النقط A و E و C و G مستوائية

ومنه $(AEC) = (AEG)$

لدينا $(BD) \subset (BDF)$

و $(BD) \perp (AEG)$

إذن $(BDF) \perp (AEG)$

تمرين 18 :

ABCD رباعي الاوجه حيث :

$(AB) \perp (BCD)$ و H مركز تعامد المثلث BCD

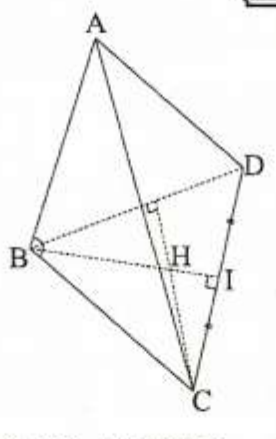
1) أ - بين أن : $(CH) \perp (ABD)$

ب - استنتج أن : $(AD) \perp (CH)$

2) نفترض أن المثلث BCD متساوي الاضلاع حيث $CB = 3\ cm$ و $AB = 4cm$

احسب حجم رباعي الاوجه ABCD.

الجواب :



1) أ - لدينا $(AB) \perp (BCD)$

و $(CH) \subset (BCD)$

إذن ① $(CH) \perp (AB)$

لدينا H مركز تعامد المثلث BCD

إذن ② $(CH) \perp (BD)$

(AB) و(BD) متقاطعان و ضمن المستوى

③ (ABD)

من ① و② و③ نستنتج أن

$(CH) \perp (ABD)$

ب - لدينا $(CH) \perp (ABD)$

و $(AD) \subset (ABD)$

إذن $(AD) \perp (CH)$

2) المثلث BCD متساوي الاضلاع

إذن (IB) ارتفاع حيث I منتصف [CD]

إذن : $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{CD \times BI}{2}$

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة في المثلث BCI القائم الزاوية في I لدينا :

$$IC^2 = BC^2 - CI^2$$

$$= 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= 9 - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{27}{4}$$

إذن : $IC = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3 \times 3\sqrt{3}}{4}$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

نعلم أن حجم رباعي الأوجه ABCD هو :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC} \times AB$$

[AB] ارتفاع لأن $(AB) \perp (BCD)$

إذن $V = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{9}\sqrt{3}}{\cancel{4}} \times \cancel{4}\,cm^3$

$$\boxed{V = 3\sqrt{3}\ cm^3}$$

تمرين 19 :

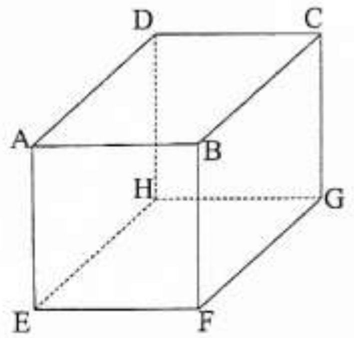
ليكن ABCDEFGH مكعب

1) - بين أن $(FC) \perp (AH)$

2) - بين أن $(FC) \perp (ABG)$

3) - استنتج أن : $(EFC) \perp (ABG)$

الجواب :



1) - لدينا BCGF مربع

إذن قطراه متعامدان

ومنه $(BG) \perp (FC)$ ①

ولدينا $\left\{\begin{array}{l}(AB) /\!/ (DC) \\ (DC) /\!/ (HG)\end{array}\right.$ إذن $(AB) /\!/ (AH)$

ولدينا $HG = AB$ ومنه ABGH متوازي اضلاع

وبالتالي $(BG) /\!/ (AH)$ ②

إذن لدينا : $(AH) /\!/ (BG)$

$(BG) \perp (FC)$

ومنه $(FC) \perp (AH)$

2) - لدينا : $(FC) \perp (BG)$

لدينا $(AB) \perp (BC)$

$(AB) \perp (BF)$

و(BC) و(BF) متقاطعان ضمن (BCF)

إذن $(AB) \perp (BCF)$

ولدينا $(FC) \subset (BCF)$

إذن $(AB) \perp (FC)$

إذن $(FC) \perp (AB)$

$(FC) \perp (BG)$

و(AB) و(BG) متقاطعان ضمن (ABG)

وبالتالي $(FC) \perp (ABG)$ ③

3) - لدينا : $(FC) \perp (ABG)$

و $(FC) \subset (EFC)$

ومنه $(EFC) \perp (ABG)$

تمرين 20 :

ليكن ABCD رباعي الاوجه بحيث :

$(AB) \perp (BCD)$

(CC') و(AA') ارتفاعان للمثلث ACD

و(CC'') ارتفاع في المثلث BCD .

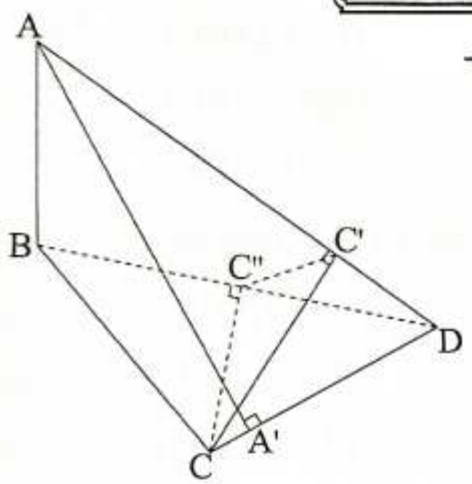
1 - انشئ الشكل.

2 - بين أن (BA') ارتفاع في المثلث BCD

3 - بين أن : $(AD) \perp (CC'C'')$

الجواب :

1 -



2- لدينا $\begin{cases}(AB)\perp(BCD)\\(CD)\perp(BCD)\end{cases}$ إذن $(AB)\perp(CD)$ ①

(AA') ارتفاع في المثلث ACD

إذن : $(AA')\perp(CD)$ ②

ولدينا (AB) و(AA') متقاطعان ضمن $(AA'B)$.

إذن من ① و② نستنتج أن

$(CD) \perp (AA'B)$

و لدينا $(A'B) \subset (AA'B)$

إذن $(CD) \perp (A'B)$

وبالتالي : (BA') ارتفاع في المثلث BCD.

3 - لدينا $(CC'')\perp(BD)$

لدينا $(AB)\perp(BCD)$

و $(CC'') \subset (BCD)$ إذن $(AB)\perp(CC'')$

إذن $(CC'')\perp(BD)$

$(CC'')\perp(AB)$

و(BD) و(BA) متقاطعان ضمن (ABD)

وبالتالي $(CC'') \perp (ABD)$

بما ان $(AD) \subset (ABD)$

إذن $(CC'') \perp (AD)$

ولدينا $(CC') \perp (AD)$ لأن (CC') ارتفاع في المثلث ACD.

ولدينا (CC') و(CC'') متقاطعان ضمن $(CC'C'')$

إذن $(AD) \perp (CC'C'')$

تمرين 21 :

ABC مثلث ضمن المستوى (P) وH مركز تعامده وO نقطة من المستقيم العمودي على (P) في H حيث $H \neq O$

1) أ - بين أن : $(AB) \perp (CHO)$

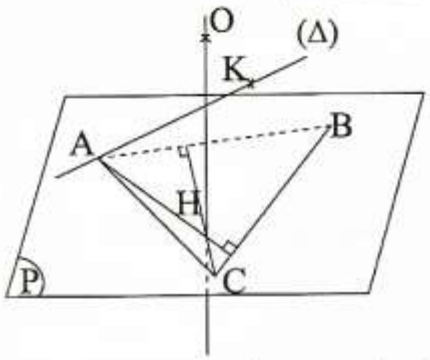
ب - استنتج أن : $(OC) \perp (AB)$

2) بين أن : $(OA) \perp (BC)$

3) المستقيم (Δ) المار من A والعمودي على (OBC) يقطع هذا المستوى في النقطة K.

بين أن : $(OK) \perp (BC)$

الجواب :



1) أ - لدينا H مركز تعامد المثلث ABC

إذن $(CH) \perp (AB)$ ①

لدينا $(P) \perp (OH)$

و $(AB) \subset (P)$

إذن $(OH) \perp (AB)$ ②

لدينا (CH) و(OH) متقاطعان في H وضمن المستوى (CHO) ③

من ① و② و③ نستنتج أن

$(AB) \perp (CHO)$

ب - لدينا $(AB) \perp (CHO)$

و $(OC) \subset (CHO)$

إذن $(AB) \perp (OC)$

2) لدينا $\begin{cases} (BC) \subset (P) \\ (P) \perp (OH) \end{cases}$

إذن $(BC) \perp (OH)$

لدينا $(AH) \perp (BC)$ لأن H مركز تعامد المثلث ABC

و(AH) و(OH) متقاطعان وضمن المستوى (AOH)

ومنه $(AOH) \perp (BC)$

وبما أن $(OA) \subset (AOH)$

فإن $(OA) \perp (BC)$

3) لدينا حسب 2 : $(OA) \perp (BC)$

لدينا $(AK) \perp (OBC)$

و $(BC) \subset (OBC)$

إذن $(AK) \perp (BC)$

لدينا (AK) و(OA) متقاطعان في A وضمن المستوى (OAK) .

إذن $(BC) \perp (OAK)$

وبما أن $(OK) \subset (OAK)$

فإن $(BC) \perp (OK)$

تمرين 22 :

نعتبر ABCD رباعي أوجه حيث :

$(AB) \perp (AC)$ و $(AC) \perp (AD)$

و $(AB) \perp (AD)$ وM نقطة من [DH]

بحيث $M \neq B$ و$M \neq C$.

المستقيم المار من M والموازي لـ (BD) يقطع (DC) في N والمستقيم المار من M والمولزي لـ (AC) يقطع (AB) في Q.

1 - ارسم الشكل

2 - بين ان : $(AC) // (MNQ)$

و $(BD) // (MNQ)$

3 - الموازي لـــ (AC) والمار من N يقطع (AD) في P

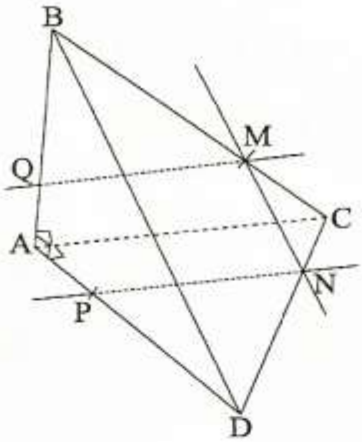
a - بين أن : $P \in (MNQ)$

b - بين أن : $(NP) \perp (PQ)$ ثم أن الرباعي MNPQ مستطيل .

4 - علما أن : $AD = 4$ و$AC = 3$ و$AB = 2$ احسب حجم رباعي الأوجه ABCD.

الجواب :

- 1



2 - لدينا $(AC) // (QM)$

و $(QM) \subset (MNQ)$

إذن $(AC) // (MNQ)$

لدينا $(BD) // (MN)$

و $(MN) \subset (MNQ)$

إذن $(BD) // (MNQ)$

3 - a - لدينا $(MQ) // (AC)$

و $(NP) // (AC)$

إذن $(MQ) // (NP)$

ومنه M ، N، P ، Q نقط مستوائية

وبالتالي $P \in (MNQ)$

b - لدينا $(AC) \perp (AB)$

$(AC) \perp (AD)$

(AB) و(AD) متقاطعان ضمن المستوى (ABD) .

ومنه $(AC) \perp (ABD)$

ولدينا $(NP) // (AC)$

ومنه $(NP) \perp (ABD)$

ولدينا $(PQ) \subset (ABD)$

ومنه $(NP) \perp (PQ)$

لدينا $(MNQ) \cap (ABD) = (PQ)$

ولدينا $(MN) \subset (MNQ)$

$(BD) \subset (ABD)$

و $(MN) // (BD)$ إذن حسب مبرهنة السقف فإن $(MN) // (PQ)$

إذن M ، N، P ، Q نقط مستوائية

و $(MN) // (PQ)$ و $(MQ) // (NP)$

و $(NP) \perp (PQ)$

إذن MNPQ مستطيل

4 - حجم رباعي الأوجه هو :

$$V = \frac{1}{3} . AB . \frac{AD . AC}{2}$$
$$= \frac{2 . 4 . 3}{6}$$

أي $V = 4$