

سلسلة 1	الحدوديات حل مقترح	الجذع المشترك العلمي والتكنولوجي
تمرين 1 :		
$Q(x) = 2x^2(x+1) - (2x-1)(x^2+1)$ $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - (2x^3 + 2x - x^2 - 1)$ $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x^3 - 2x + x^2 + 1$ $Q(x) = 3x^2 - 2x + 1$ <p style="text-align: center;">منه: $d^{\circ}Q = 2$</p>	$P(x) = (x+1)(x-8) + (x-3)^2$ $P(x) = x^2 - 8x + x - 8 + x^2 - 6x + 9$ $P(x) = 2x^2 - 13x + 1$ <p style="text-align: center;">منه: $d^{\circ}P = 2$</p>	
$G(x) = x(2+5x)(x-\sqrt{2})$ $G(x) = (2x+5x^2)(x-\sqrt{2})$ $G(x) = 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 5x^3 - 5\sqrt{2}x^2$ $G(x) = 5x^3 + (2-5\sqrt{2})x^2 - 2\sqrt{2}x$ <p style="text-align: center;">منه: $d^{\circ}G = 3$</p>	$H(x) = (x+2)^3 + x^4 - (x^2-1)^2$ $H(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^4 - (x^4 - 2x^2 + 1)$ $H(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^4 - x^4 + 2x^2 - 1$ $H(x) = x^3 + 8x^2 + 12x + 7$ <p style="text-align: center;">منه: $d^{\circ}H = 3$</p>	
<p style="text-align: right;">انتبه وضع أقواسا قبل كل نشر مسبق برمز. ، وتذكر المتطابقات الإضافية: $(a+b)^3 = a^3 + 3ba^2 + 3ab^2 + b^3$ و $(a-b)^3 = a^3 - 3ba^2 + 3ab^2 - b^3$</p>		
تمرين 2 : a و b و c أعداد حقيقية		
$(a-3)x^2 + (1-b)x + 8 = (x-1)^2 + 5(x+c) + 7$ $(a-3)x^2 + (1-b)x + 8 = x^2 - 2x + 1 + 5x + 5c + 7 \quad \text{لدينا :}$ $(a-3)x^2 + (1-b)x + 8 = x^2 + 3x + (5c+8)$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px;"> $\begin{cases} a=4 \\ b=-2 \\ c=0 \end{cases}$ </div> <div style="text-align: center;">أي : $\begin{cases} a=4 \\ -b=2 \\ 5c=0 \end{cases}$ منه :</div> <div style="text-align: center;"> $\begin{cases} a-3=1 \\ 1-b=3 \\ 8=5c+8 \end{cases}$ </div> </div>	1	
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px;"> $\begin{cases} a=-3 \\ b=\frac{19}{3} \\ c=\frac{20}{4}=5 \end{cases}$ </div> <div style="text-align: center;">منه : $\begin{cases} 3+a=0 \\ 19=3b \\ 20=5c \end{cases}$ منه :</div> <div style="text-align: center;"> $\begin{cases} (x+5)(3x+4) + ax^2 = 3bx + 5c \\ 3x^2 + 4x + 15x + 20 + ax^2 = 3bx + 5c \\ (3+a)x^2 + 19x + 20 = 3bx + 5c \end{cases}$ </div> </div>	2	
$a(x+2)^2 + b(x+2) + c = 2x^2 + 9x + 10$ $a(x^2 + 4x + 4) + bx + 2b + c = 2x^2 + 9x + 10 \quad \text{لدينا :}$ $ax^2 + 4ax + 4a + bx + 2b + c = 2x^2 + 9x + 10$ $ax^2 + (4a+b)x + (4a+2b+c) = 2x^2 + 9x + 10$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px;"> $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$ </div> <div style="text-align: center;">بالتالي : $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ 8+2+c=10 \end{cases}$ أي :</div> <div style="text-align: center;"> $\begin{cases} a=23 \\ 8+b=9 \\ 8+2b+c=10 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} a=2 \\ 4a+b=9 \\ 4a+2b+c=10 \end{cases}$ منه : </div> </div>	3	
<p style="text-align: right;">لايجاد الأعداد المطلوبة يكفي نشر وترتيب الحدوديات ثم استنتاج تساوي المعاملات التي من نفس الدرجة.</p>		
تمرين 3 : $P(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$		
$P(2) = 8 + 24 - 2 - 30 = 0 \quad , \quad P(1) = 1 + 6 - 1 - 30 = -24 \quad , \quad P(0) = 0 + 0 - 0 - 30 = -30$	1	

$$P(-1) = -1 + 6 + 1 - 30 = -24, \quad P(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 12 - \sqrt{2} - 30 = \sqrt{2} - 18$$

بما أن $P(2) = 0$ فإن 2 هو جذر للحدودية $P(x)$ 2

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 6x^2 - x - 30 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & \\ \hline 0 & 8x^2 - x \\ & \underline{8x^2 - 16x} \\ & 0 & 15x - 30 \\ & & \underline{15x - 30} \\ & & 0 \end{array}$$

لايجاد الحدودية $Q(x)$ ننجز القسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على

$$x - 2$$

$$Q(x) = x^2 + 8x + 15 : \text{ فنجد أن}$$

3

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 8x + 15 & x + 3 \\ \hline x^2 + 3x & \\ \hline & 5x + 15 \\ & \underline{5x - 15} \\ & 0 \end{array}$$

لدينا : $Q(-3) = 9 - 24 + 15 = 0$ إذن -3 جذر للحدودية $Q(x)$

ننجز القسمة الإقليدية لـ $Q(x)$ على $x + 3$

$$Q(x) = (x + 3)(x + 5) : \text{ فنجد أن}$$

4

لدينا : $P(x) = (x - 2)Q(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 5)$ 5

لدينا : $P(x) = 0$
يعني : $x - 2 = 0$ أو $x + 3 = 0$ أو $x + 5 = 0$ أي $x = 2$ أو $x = -3$ أو $x = -5$

$$(x - 2)(x + 3)(x + 5) = 0$$

$$S = \{2, -3, -5\} : \text{ بالتالي}$$

6

استعملنا القواعد التالية : $|x| = x$ إذا كان $x \geq 0$ و $|x| = -x$ إذا كان $x \leq 0$ و $\sqrt{x^2} = |x|$

تمرين 4 : $P(x) = 4x^3 - 3x + 1$ و $R(x) = 4x^3 - 3x - 1$

لدينا : $P(-1) = -4 + 3 + 1 = 0$ إذن -1 جذر للحدودية $P(x)$ إذن فهي تقبل القسمة على $x + 1$ أ

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 0x^2 - 3x + 1 & x + 1 \\ \hline 4x^3 + 4x^2 & \\ \hline 0 & -4x^2 - 3x \\ & \underline{-4x^2 - 4x} \\ & 0 & x + 1 \\ & & \underline{x + 1} \\ & & 0 \end{array}$$

لايجاد الحدودية $Q(x)$ ننجز القسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على

$$x + 1$$

$$Q(x) = 4x^2 - 4x + 1 : \text{ فنجد أن}$$

ب

1

لدينا : $(x - 1)(2x + 1)^2 = (x - 1)(4x^2 + 4x + 1) = 4x^3 + 4x^2 + x - 4x^2 - 4x - 1 = 4x^3 - 3x - 1 = R(x)$ 2

لدينا : $R(x) = (x - 1)(2x + 1)^2$

منه : $R(x) = 0$ تعني : $(x - 1)(2x + 1)^2 = 0$

أي : $x - 1 = 0$ أو $2x + 1 = 0$

$$\text{أي : } x = 1 \text{ أو } x = -\frac{1}{2}$$

لدينا :

$$P(x) = (x + 1)(4x^2 - 4x + 1) = (x + 1)(2x - 1)^2$$

منه : $P(x) = 0$ تعني : $(x + 1)(2x - 1)^2 = 0$

أي : $x + 1 = 0$ أو $2x - 1 = 0$

$$\text{أي : } x = -1 \text{ أو } x = \frac{1}{2}$$

3

$$S = \left\{1, -\frac{1}{2}\right\} \text{ بالتالي}$$

$$S = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\} \text{ بالتالي}$$

لنحل في IR المتراجحة: $P(x) \geq 0$ أي: $(x+1)(2x-1)^2 \geq 0$

بما أننا نعلم أن الحدودية $(2x-1)^2$ موجبة و تنعدم في $\frac{1}{2}$

فإن المتراجحة: $(x+1)(2x-1)^2 \geq 0$ تعني: $x = \frac{1}{2}$ أو $(x+1) \geq 0$ أي: $x \geq -1$ أو $x = \frac{1}{2}$

$$\text{بالتالي: } S = [-1, +\infty[\cup \left\{\frac{1}{2}\right\} = [-1, +\infty[\text{ (لأن: } \frac{1}{2} \in [-1, +\infty[)$$

الطريقة العامة لحل متراجحات من الدرجة الثانية فأكثر تتطلب جدول الإشارات، لكن في هذه الحالة و لكون أحد العوامل موجب فهي طريقة أسهل لكنها لن تكون مفيدة في حالات أخرى، لذلك سيتم حل المتراجحة الموالية عن طريق جدول الإشارات لاستفادة أكبر.

4

لنحل في IR المتراجحة: $R(x) \leq 0$ أي: $(x-1)(2x+1)^2 \leq 0$ لدينا:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	0	+
$(2x+1)^2$	+	0	+	+
$(x-1)(2x+1)^2$	-	0	-	+

$$\text{بالتالي: } S =]-\infty, 1]$$

المتفاوتة $-1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$ تعني: $-1 \leq 4x^3 - 3x$ و $4x^3 - 3x \leq 1$ أي: $4x^3 - 3x + 1 \geq 0$ و $4x^3 - 3x - 1 \leq 0$

أي: $P(x) \geq 0$ و $R(x) \leq 0$ بالتالي: $x \in [-1, +\infty[$ و $x \in]-\infty, 1]$

أي: $x \in]-\infty, 1] \cap [-1, +\infty[$ بالتالي: $S = [-1, 1]$

5

استعملنا القواعد التالية: $|x| = x$ إذا كان $x \geq 0$ و $|x| = -x$ إذا كان $x \leq 0$ و $\sqrt{x^2} = |x|$

تمرين 5: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 10x - 4 & x - 2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 - 4x + 2 \\ \hline 0 - 4x^2 + 10x & \\ \hline -4x^2 + 8x & \\ \hline 0 + 2x - 4 & \\ \hline 2x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

1

لدينا: $P(x) - 2(2-x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4 - 4 + 2x = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^2$

2

لنحل في IR المتراجحة: $|P(x) - 2(2-x)| \leq 8 \times 10^{-3}$

لدينا: $|P(x) - 2(2-x)| \leq 8 \times 10^{-3}$ تعني: $|x-2|^3 \leq 2^3 \times 0,1^3$ تعني: $|x-2| \leq 0,2$

3

تعني أن: $-0,2 \leq x-2 \leq 0,2$ تعني: $-0,2 + 2 \leq x \leq 0,2 + 2$ أي: $1,8 \leq x \leq 2,2$ بالتالي: $S = [1,8 ; 2,2]$

بما أن: $1,845 \in [1,8 ; 2,2]$ فإنها تحقق المتفاوتة السابقة، منه: $|P(1,845) - 2(2-1,845)| \leq 8 \times 10^{-3}$

4

أي: $|P(1,845) - 0,31| \leq 8 \times 10^{-3}$ ، وهذا يعني أن 0,31 هي قيمة مقربة للعدد $P(1,845)$ إلى 8×10^{-3}

استعملنا في السؤال 5 خاصية مقبولة: "إذا كان $a^3 \leq b^3$ فإن $a \leq b$ "

تمرين 6 : - مزيدا من التفكير -

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x(x+3)(x+1)(x+2)+1 = (x^2+3x)(x^2+2x+x+2)+1$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x)+1 \quad \text{لدينا :} \quad 1$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x+1)^2$$

2 حسب السؤال السابق إذا كان n عدد صحيح طبيعي فإن الأعداد التي تليه هي $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ وبذلك يكون جذاؤها بعد إضافة 1 هو $(n^2+3n+1)^2$ والذي يمثل مربع عدد صحيح طبيعي.