* حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g)
* حلول المتراجحة $f(x) \leqslant g(x)$ مثلا هي أفاصيل نقط المستوى (P) التي يكون (C_f) تحت (C_g)

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = -x^2 + 2$ و$(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\Omega(0, 2)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لــ $(\mathscr{C})$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

أ – حدد نقط تقاطع $(\mathscr{C})$ مع محوري المعلم.

ب – أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ج – استنتج جدول تغيرات f

3 - حل مبيانيا المتراجحتين $f(x) \geqslant 0$ و $f(x) < 1$

الجواب :

1 - معادلة المنحنى (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي $y = f(x)$

يعني $y = -x^2 + 2$

يعني $y - 2 = -x^2$

نضع $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases}$

معادلة (C_f) تصبح $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(0, 2)$

2 - أ – (C_f) يقطع محور الأراتيب في $I(0, f(0))$ أي $\Omega(0, 2)$

$f(x) = 0$ يعني $-x^2 + 2 = 0$

يعني $x^2 = 2$

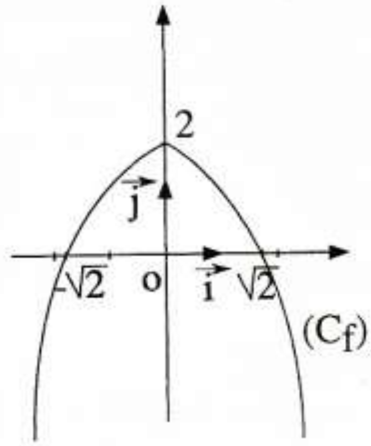
يعني $x = \sqrt{2}$ أو $x = -\sqrt{2}$

ومنه (C_f) يقطع محور الأفاصيل في $A(\sqrt{2}, 0)$

و $B(-\sqrt{2}, 0)$

ب – معادلة (C_f) هي $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ إذن (C_f) عبارة عن شلجم رأسه Ω موجه نحو الأسفل

يمكن الوصول لهذه النتيجة كالآتي (C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي $\Omega(0, 2)$ موجه نحو الأسفل.



ج – جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	2	↘

3 - $f(x) \geqslant 0$ يعني x توجد في المجال الدي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاصيل

$S = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$f(x) < 0$ يعني x توجد في المجال الدي يكون فيه (C_f) تحت محور الأفاصيل إذن :

$S =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

تمرين 2 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x^2 - 2x$$

(C) منحنى الدالة f في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

و $\Omega(1, -1)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لــ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أ - حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

ب – أنشئ (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

3 - حل مبيانيا المتراجحتين :

$f(x) \leqslant 0$ و $f(x) \geqslant 3$

الجواب :

1 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

يعني $y = x^2 - 2x$

يعني $y + 1 = x^2 - 2x + 1$

يعني $y + 1 = (x - 1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y + 1 \end{cases}$

معادلة (C_f) في المعلم هي $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, -1)$

2 - أ– نقطة تقاطع $(\mathscr{E})$ مع محور الأراتيب هي

$O(0, f(0))$ أي $O(0, 0)$

$f(x) = 0$ أي $x^2 - 2x = 0$

يعني $x(x - 2) = x$

يعني $x = 0$ أو $x = 2$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في :

$O(0,0)$ و $A(2,0)$

ب – معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

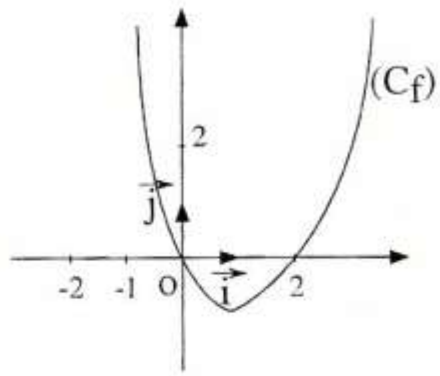
هي : $Y = X^2$

إذن $(\mathscr{C})$ شلجم رأسه Ω وموجه نحو الأعلى

طريقة 2 :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي

$\Omega(1,-1)$ موجه نحو الأعلى.



3 - $f(x) \leqslant 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) تحت محور الأفاصيل

إذن $S = [0, 2]$

$f(x) \geqslant 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاصيل

$S =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

تمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـ :

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$$

ليكن (C) منحنى الدالة f في المعلم المتعامد والمنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\Omega(1,1)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أ – حدد تقاطع (C) مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب – أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - اعط جدول تغيرات f

4 - حل مبيانيا المتراجحة $f(x) \leqslant 0$

5 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث m بارامتري حقيقي.

الجواب :

1 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

يعني : $y = 2x^2 - 4x + 3$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$

المعادلة في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, 1)$ تكافئ

$$Y + 1 = 2(X + 1)^2 - 4(X + 1) + 3$$

يعني

$$Y + 1 = 2(X^2 + 2X + 1) - 4X - 4 + 3$$

$$Y + 1 = 2X^2 + 4X + 2 - 4X - 4 + 3$$

$$Y + 1 = 2X^2 + 1$$

$$Y = 2X^2$$

معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي $Y = 2X^2$

2 - أ- نقط تقاطع C_f ومحور الأراتيب هي:

$A(0, f(0))$ أي أن $A(0, 3)$

لتحديد نقط تقاطع (C_f) ومحور الأفاصيل نحل المعادلة :

$2x^2 - 4x + 3 = 0$

$= 16 - 4\ 2\ 3$

$= -8 < 0$

إذن (C_f) لا يقطع محور الأفاصيل

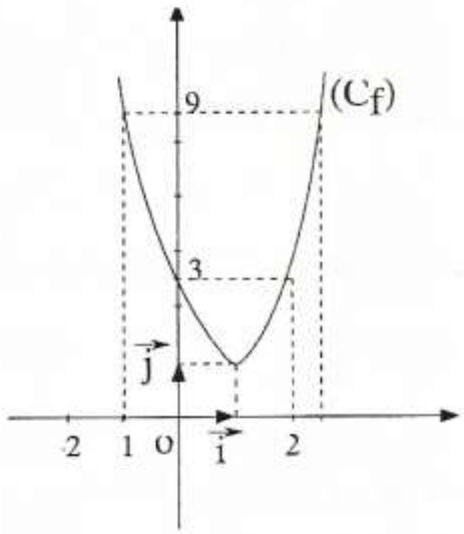
ج – (C_f) شلجم رأسه $\Omega(1, 1)$ ومحور تماثله المستقيم ذو المعادلة $x = 1$

طريقة 2 :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي $\Omega(1, -1)$.

لدينا

x	-1	0	1	2	3
f(x)	9	3	1	3	9



3 - جدول تغيرات f من خلال المنحنى

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	↘	1	↗

4 - لدينا $f(x) \leqslant 0$ يعني x يوجد في المجالات التي يكون فيها (C) تحت محور الأفاصيل.

وبما أن (C) يوجد فوق محور الأفاصيل

فإن $S = \phi$

5 - لدينا : $f(x) = m$ يعني x أفصول نقطة تقاطع (C) مع المستقيم $y = m$ (Δ)

إذا كان $m = 1$ هناك حل وحيد وهو $x = 1$ لأن (Δ) يقطع (C) مرة واحدة.

إذا كان $m < 1$ ليس هناك حل لأن (C) و(Δ) لا يتقاطعان.

إذا كان $m > 1$ هناك حلين مختلفين لأن (Δ) يقطع (C) مرتين.

تمرين 4 :

لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$f(x) = -2x^2 + 2x - 1$

و (C) تمثيلها المبياني في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

و$\Omega\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

1 - حدد معادلة ديكارتية لـ (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

2 - أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - نعتبر الدالة g المعرفة بـ :

$g(x) = 2x - 3$

أ – أنشئ (C') منحنى g في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب – حل مبيانيا المتراجحة $g(x) \leqslant f(x)$

الجواب :

1 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي $y = f(x)$

يعني $y = -2x^2 + 2x - 1$

لدينا $\Omega(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

نضع
$$\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

يعني
$$\begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

معادلة (C) تكافئ

$$Y - \frac{1}{2} = -2(X + \frac{1}{2})^2 + 2(X + \frac{1}{2}) - 1$$

$$Y - \frac{1}{2} = -2(X^2 + X + \frac{1}{4}) + 2X + 1 - 1$$

يعني
$$Y - \frac{1}{2} = -2X^2 - 2X - \frac{1}{2} + 2X$$

يعني $Y = -2X^2$

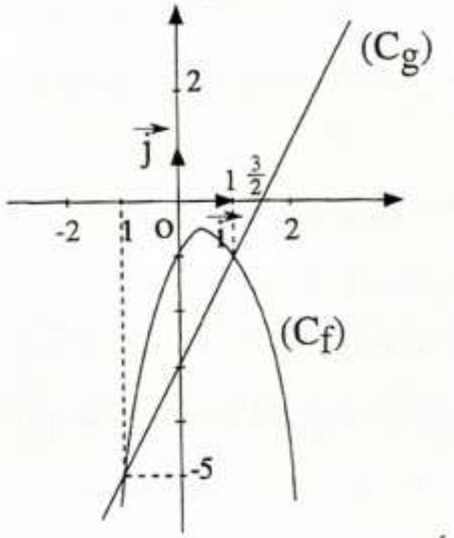
إذن معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

هي $Y = -2X^2$

2 - معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ هي $Y = -2X^2$ إذن (C) شلجم رأسه Ω وموجه نحو الأسفل

طريقة 2 :

(C_f) شلجم رأسه $\Omega(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$



3 - أ – (C') مستقيم معادلته $y = 2x - 3$

ب – $g(x) \leqslant f(x)$ يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C') تحت (C) إذن

$S = [-1, \frac{3}{2}]$

تمرين 5 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد نقط تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

2 - تحقق أن : $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$ لكل $x \in \mathbb{R}$

3 - أ – بين أنه لكل x_1 و x_2 من $\mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$ لدينا :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4)$$

ب – استنتج رتابة الدالة f على المجالين

$]-\infty , -2]$ و $[-2 , +\infty[$

4 - لتكن Ω (-2, -2) نقط من المستوى (P).

بين أن معادلة (C) هي $Y = \frac{1}{2}X^2$ في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$

5 - أنشئ المنحنى (C)

6 - حل مبيانيا المتراجحة $x^2 + 4x > 0$

الجواب :

1 - لدينا $f(x) = 0$ يعني $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 0$

يعني $x(\frac{1}{2}x + 2) = 0$

يعني $x = 0$ أو $\frac{1}{2}x + 2 = 0$

يعني $x = 0$ أو $x = -4$

إذن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في

$O(0 , 0)$ و $A(-4 , 0)$

2 - لدينا

$$\frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) - 2$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 - 2$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x = f(x)$$

وبالتالي : $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$

3 - أ – ليكن x_1 و x_2 من $\mathbb{R}$ بحيث $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(x_1+2)^2 - 2 - \frac{1}{2}(x_2+2)^2 + 2}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(x_1 + 2 - x_2 - 2)(x_1 + 2 + x_2 + 2)}{x_1 - x_2}$$
$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4)}{2(x_1 - x_2)}$$

وبالتالي :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4)$$

ب – في المجال $]-\infty , -2]$

لدينا $\begin{cases} x_1 \leqslant -2 \\ x_2 \leqslant -2 \end{cases}$ إذن

$x_1 + x_2 \leqslant -4$

يعني $x_1 + x_2 + 4 \leqslant 0$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4) \leqslant 0$$

إذن f تناقصية على $]-\infty , -2]$

في المجال $[-2 , +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x_1 \geqslant -2 \\ x_2 \geqslant -2 \end{cases}$ إذن

$x_1 + x_2 \geqslant -4$

إذن $x_1 + x_2 + 4 \geqslant 0$

ومنه $\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 4) \geqslant 0$

أي $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0$

إذن f تزايدية على $[-2 , +\infty[$

4 - معادلة (C) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

هي $y = f(x)$

يعني $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$

يعني $y + 2 = \frac{1}{2}(x+2)^2$

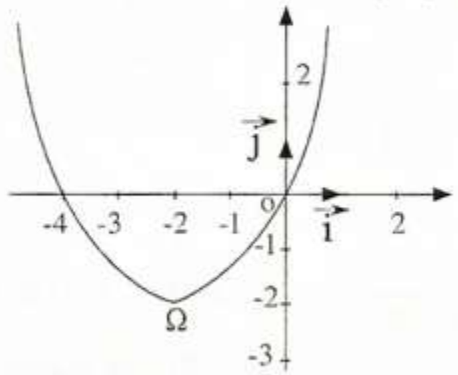
نضع $\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y+2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{2}X^2$

في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(-2, -2)$

5 - (C_f) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ أي $\Omega(-2, -2)$.

- 5



- 6

$\frac{1}{2}(x^2 + 4x) > 0$ يعني $x^2 + 4x > 0$

يعني $\frac{1}{2}x^2 + 2x > 0$

يعني $f(x) > 0$

يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C) فوق محور الأفاصيل

إذن $S =]-\infty, -4[\cup]0, +\infty[$

تمرين 6 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ :

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

1 - حدد مجموعة التعريف D_f

2 - بين أن :

$f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ لكل $x \in D_f$

3 - حدد طبيعة المنحنى (C_f). حيث (C_f) منحنى f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - أنشئ المنحنى (C_f)

5 - اعط جدول تغيرات f

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

2 - لدينا

$2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-2+1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1} = f(x)$

$f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$ لكل $x \in D_f$

3 - معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

$y = 2 + \frac{1}{x-1}$

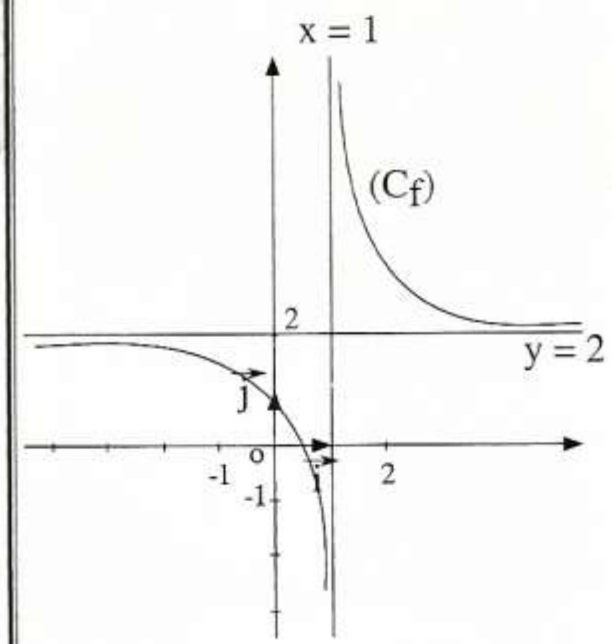
$y - 2 = \frac{1}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$

في المعادلة $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(1, 2)$

4 - المنحنى (C_f) هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right)$ $\Omega(1, 2)$ ومقارباه المستقيمان $x = 1$ و $y = 2$



5 - من خلال منحنى الدالة f فإن جدول التغيرات هو :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

تمرين 7 :

لتكن الدالتين f و g المعرفتين بما يلي :

$$g(x) = \frac{-x+2}{x-1} \qquad f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

1 - حدد مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g

2 - اعط جدول تغيرات كل من f و g.

3 - حدد طبيعة كل من المنحنيين (C_f) و (C_g)

4 - أ – حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ب – حدد نقط تقاطع (C_g) مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5 - أنشئ (C_f) و (C_g) في معلمين مختلفين.

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ يعني $x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

لدينا $x \in D_g$ يعني $x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

إذن $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

2 - تغيرات f

ليكن x و y من D_f بحيث $x \neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \left(\frac{2x+3}{x-2} - \frac{2y+3}{y-2}\right) \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \left(\frac{2xy-4x+3y-6-2xy-3x+4y+6}{(x-2)(y-2)}\right) \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-7x+7y}{(x-2)(y-2)(x-y)}$$

$$= \frac{-7(x-y)}{(x-2)(y-2)(x-y)}$$

إذن $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{-7}{(x-2)(y-2)}$

في المجال $]2, +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases}$ إذن

$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ y - 2 > 0 \end{cases}$

$$(x-2)(y-2) > 0$$

$$\frac{-7}{(x-2)(y-2)} < 0$$

ومنه f تناقصية على $]2 , +\infty[$

في المجال $]-\infty , 2[$

لدينا $\begin{cases} x < 2 \\ y < 2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x - 2 < 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases}$

إذن $(x-2)(y-2) > 0$

$$\frac{-7}{(x-2)(y-2)} < 0$$

إذن f تناقصية على $]-\infty , 2[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

تغيرات g :

ليكن x و y من Dg بحيث $x \neq y$

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \left(\frac{-x+2}{x-1} - \frac{-y+2}{y-1}\right) \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{(-x+2)(y-1) - (x-1)(-y+2)}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-xy + x + 2y - 2 + xy - 2x - y + 2}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-x+y}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{-(x-y)}{(x-1)(y-1)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = \frac{-1}{(x-1)(y-1)}$$

في المجال $]1 , +\infty[$

لدينا $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$

ومنه $(x-1)(y-1) > 0$

إذن $\frac{-1}{(x-1)(y-1)} < 0$

وبالتالي g تناقصية على $]1 , +\infty[$

في المجال $]-\infty , 1[$

لدينا $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$

ومنه $(x-1)(y-1) > 0$

إذن $\frac{-1}{(x-1)(y-1)} < 0$

وبالتالي g تناقصية على $]-\infty , 1[$

جدول تغيرات g هو :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g(x)	↘	‖	↘

3 - معادلة (C_f) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

يعني $y = \frac{2x+3}{x-2}$

يعني $y = \frac{2(x-2)+7}{x-2}$

يعني $y = \frac{2(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2}$

يعني $y = 2 + \frac{7}{x-2}$

يعني $y - 2 = \frac{7}{x-2}$

نضع $\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y-2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{7}{X}$ في المعلم $(A, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $A(2, 2)$

وبالتالي (C_f) هذول مركزه A ومقارباه

المستقيمان $x = 2$ و $y = 2$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $A\,(2, \frac{2}{1})$ ومقارباه

$x = 2$ و $y = 2$

معادلة (C_g) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي

$y = g(x)$

يعني $y = \frac{-x+2}{x-1}$

يعني $y = \frac{-(x-1)+1}{x-1}$

يعني $y = \frac{-(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1}$

يعني $y = -1 + \frac{1}{x-1}$

يعني $y + 1 = \frac{1}{x-1}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{1}{X}$ في المعلم $(B, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $B(1, -1)$

إذن (C_g) هذلول مركزه $B(1, -1)$ ومقارباه

المستقيمان $x = 1$ و $y = -1$

أو مباشرة (C_g) هذلول مركزه $\Omega\,(1, -\frac{1}{1})$

مقارباه $x = 1$ أو $y = -1$

4 - أ – نقط تقاطع (C_f) مع محور الأفاصيل

$f(x) = 0$ يعني $\frac{2x+3}{x-2} = 0$

يعني $2x + 3 = 0$

يعني $x = -\frac{3}{2}$

إذن (C_f) يقطع محور الأفاصيل في $I(-\frac{3}{2}, 0)$

(C_f) يقطع محور الأراتيب في : $J(0, f(0))$

أي $J(0, -\frac{3}{2})$

ب – نقط تقاطع (C_g) مع محور الأفاصيل

$g(x) = 0$ يعني $\frac{-x+2}{x-1} = 0$

يعني $-x + 2 = 0$

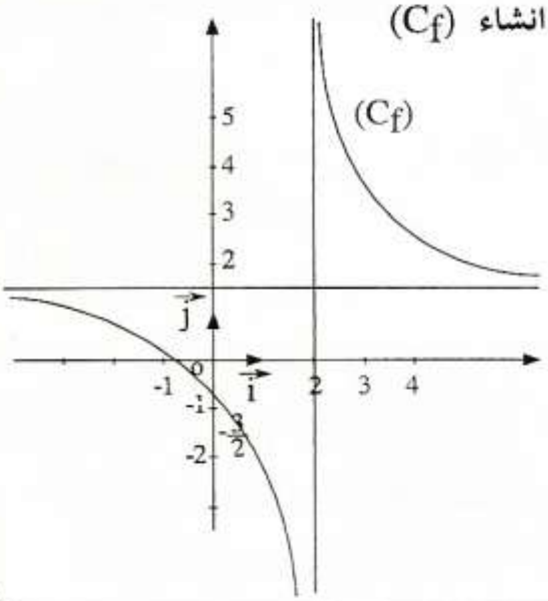
يعني $x = 2$

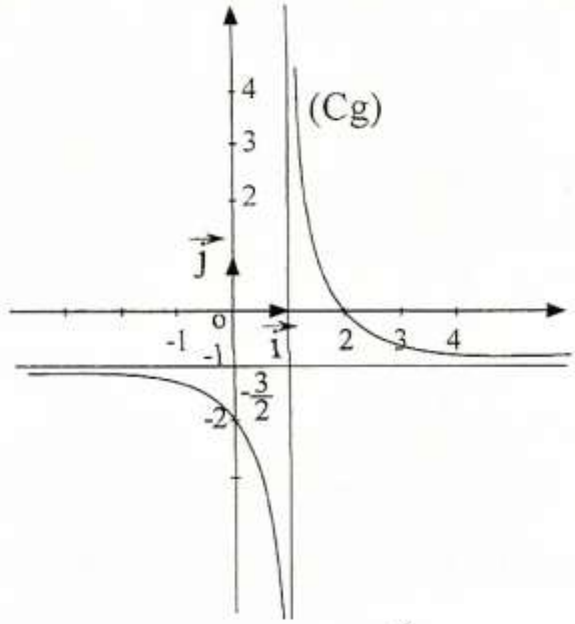
إذن (C_g) يقطع محور الأفاصيل في $I'(2, 0)$

(C_g) يقطع محور الأراتيب في $J'(0, g(0))$

أي $J'(0, -2)$

5 - انشاء (C_f)





تمرين 8 :

لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد Df مجموعة تعريف الدالة f

2 - أدرس تغيرات f على المجال $]0 , +\infty[$

3 - ليكن $\Omega(1, 2)$ نقطة في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ – بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $Y = \frac{3}{X}$

ب – أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الجواب :

1 - لدينا $x \in D_f$ يعني $x \neq 0$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

2 - ليكن x و y من $]0 , +\infty[$ بحيث $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\frac{2x+3}{x} - \frac{2y+3}{y}}{x - y}$$

$$= \frac{2xy + 3y - 2xy - 3x}{xy} \times \frac{1}{x - y}$$

$$= \frac{-3(x - y)}{xy} \times \frac{1}{x - y}$$

إذن $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-3}{xy}$

لكل x و y من $]0 , +\infty[$ لدينا $xy > 0$

إذن $\frac{-3}{xy} < 0$

وبالتالي f تناقصية على $]0 , +\infty[$

3 - أ – معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

يعني $y = \frac{2x+3}{x}$

يعني $y = \frac{2x}{x} + \frac{3}{x}$

يعني $y = 2 + \frac{3}{x}$

يعني $y - 2 = \frac{3}{x}$

نضع $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases}$

إذن معادلة تصبح $Y = \frac{3}{X}$

في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega(0, 2)$

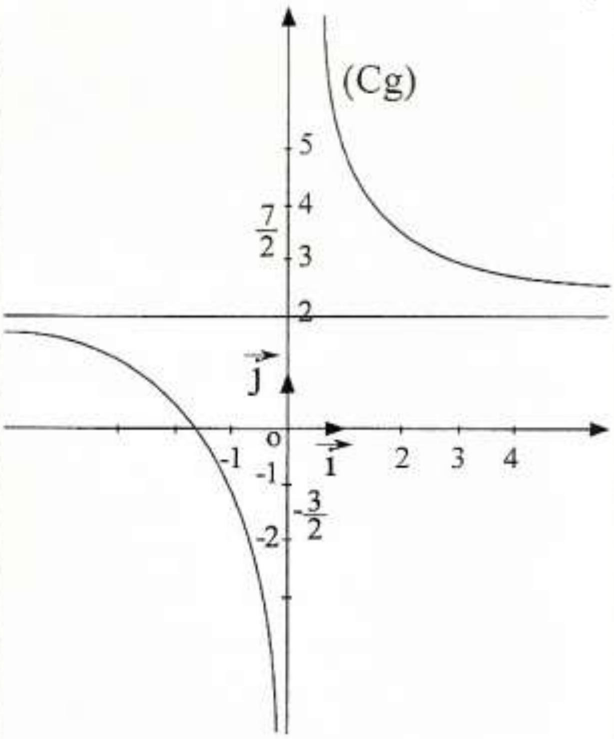
ب – المنحنى (C_f) هذلول مركزه Ω ومقارباه المستقيمان $x = 0$ و $y = 2$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $\Omega(0, \frac{2}{1})$ ومقارباه

$x = 0$ و $y = 2$

ب –



تمرين 9 :

لتكن الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة

بـــ : $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد

وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - حدد مجموعة التعريف Df وتحقق أن لكل

x من Df : $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x+2}$

2 - أدرس تغيرات f على المجال $]-2, +\infty[$

3 - ليكن $\Omega(-2, 2)$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

أ – بين أن معادلة (C_f) في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $Y = -\dfrac{4}{X}$

ب – أنشئ (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x + 2 \neq 0$

يعني $x \neq -2$

إذن $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

لدينا

$$2 - \frac{4}{x+2} = \frac{2x+4-4}{x+2} = \frac{2x}{x+2} = f(x)$$

ومنه $f(x) = 2 - \dfrac{4}{x+2}$ لكل x من Df.

2 - ليكن x و y من $]-2, +\infty[$ بحيث $x \neq y$ لدينا :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{2 - \frac{4}{x+2} - 2 + \frac{4}{y+2}}{x-y}$$

$$= \frac{\frac{-4(y+2)+4(x+2)}{(x+2)(y+2)}}{x-y}$$

$$= \frac{-4y-8+4x+8}{(x+2)(y+2)} \times \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{4(x-y)}{(x+2)(y+2)} \times \frac{1}{x-y}$$

إذن $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{4}{(x+2)(y+2)}$

لدينا $\begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x+2 > 0 \\ y+2 > 0 \end{cases}$

إذن $(x+2)(y+2) > 0$ ومنه

$$\frac{4}{(x+2)(y+2)} > 0$$

ومنه f تزايدية قطعا على $]-2\,,+\infty[$

3 - أ – معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

$$y = 2 - \frac{4}{x+2}$$

$$y - 2 = \frac{-4}{x+2}$$

نضع $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = -\frac{4}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega\,(2\,,2)$

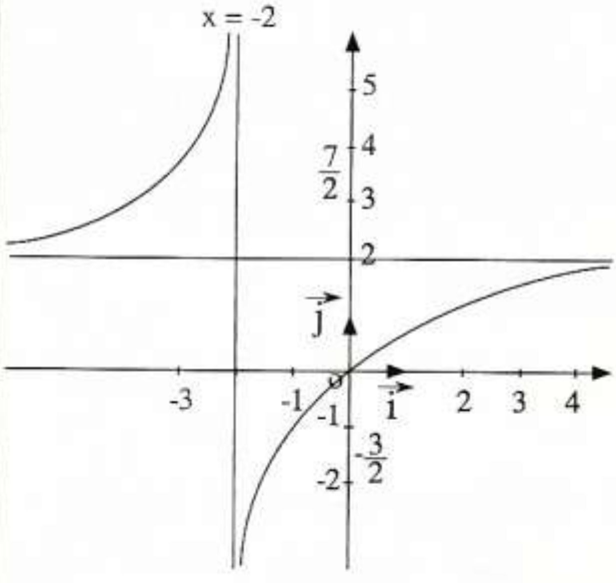
ب – (C_f) عبارة عن هذلول مركزه Ω

ومقارباه لمستقيمان $x = -2$ و $y = 2$

طريقة 2 :

(C_f) هذلول مركزه $\Omega\,(-\frac{d}{c}\,,\frac{a}{c})$ أي

$\Omega\,(-2\,,2)$ ومقارباه $x = -2$ و $y = 2$



تمرين 10:

لتكن الدالة f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x\,|x| - 2x + 2$$

1 - أ – بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$ لدينا :

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

ب – بين أن لكل x من $\mathbb{R}^-$ لدينا :

$$f(x) = -(x+1)^2 + 3$$

2 - أنشئ (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - حل مبيانيا المعادلة : $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$

4 - حل مبيانيا المعادلة : $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$

الجواب :

1 - أ – ليكن $x \in \mathbb{R}^+$ إذن : $|x| = x$

لدينا $f(x) = x\,|x| - 2x + 2$

$= x^2 - 2x + 1 + 1$

إذن $f(x) = (x-1)^2 + 1$

ب – ليكن $x \in \mathbb{R}^-$ لدينا : $|x| = -x$

لدينا $f(x) = x\,|x| - 2x + 2$

$= x\,(-x) - 2x + 2$

$= -x^2 - 2x - 1 + 3$

إذن $f(x) = -(x+1)^2 + 3$

2 - في $\mathbb{R}^+$ لدينا معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

يعني $y = (x-1)^2 + 1$

يعني $y - 1 = (x-1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

معادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 1)$

في $\mathbb{R}^+$ إذن (C_f) جزء من الشلجم الذي

معادلته $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

في $\mathbb{R}^-$ لدينا معادلة (C_f) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

هي : $y = f(x)$

$$y = -(x + 1)^2 + 3$$

$$y - 3 = -(x + 1)^2$$

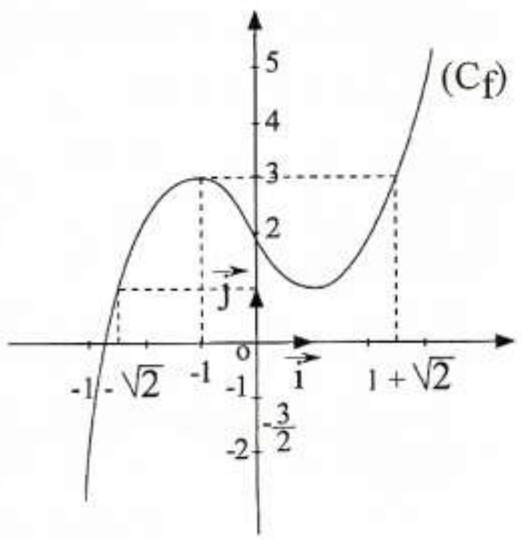
نضع $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 3 \end{cases}$

معادلة (C_f) تصبح $Y = -X^2$ في المعلم

$(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\Omega'(-1, 3)$

إذن في $\mathbb{R}^-$ (Cf) جزء من شلجم معادلته

$Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$



3 - $f(x) = m$ يعني x أفصول لنقطة تقاطع

(C_f) والمستقيم $y = m$

إذن عدد نقط تقاطع (C_f) والمستقيم

$(D) : y = m$ هو عدد حلول المعادلة

$f(x) = m$ هو :

إذا كان $m < 1$ أو $m > 3$ هناك حل وحيد

إذا كان $m = 1$ أو $m = 3$ هناك حلان مختلفان

إذا كان $1 < m < 3$ هناك ثلاثة حلول مختلفة.

4 - $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ يعني أن (C_f) محصور بين

المستقيمين $y = 1$ و $y = 3$

لنحل أولا المعادلة $f(x) = 3$

في المجال $[0, +\infty[$

$f(x) = 3$ يعني $(x - 1)^2 + 1 = 3$

يعني $(x - 1)^2 = 2$

يعني $x - 1 = \sqrt{2}$ أو $x - 1 = -\sqrt{2}$

يعني $x = 1 + \sqrt{2}$ أو $x = 1 - \sqrt{2}$

إذن $x = 1 + \sqrt{2}$

في المجال $]-\infty, 0]$

$f(x) = 3$ تكافئ $x = -1$

لنحل المعادلة $f(x) = 1$

في المجال $[0, +\infty[$

$f(x) = 1$ تكافئ $x = 1$

في المجال $]-\infty, 0]$

$f(x) = 1$ يعني $(x + 1)^2 + 3 = 1$

يعني $-(x - 1)^2 = -2$

يعني $(x + 1)^2 = 2$

$x+1=\sqrt{2}$ يعني $x+1=-\sqrt{2}$

$x=-1+\sqrt{2}$ يعني $x=-1-\sqrt{2}$

إذن $x=-1-\sqrt{2}$

بالرجوع إلى البداية فإن :

$1\leqslant f(x)\leqslant 3 \quad -1-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant -1+\sqrt{2}$

إذن : $S=[-(1+\sqrt{2})\,;\,(1+\sqrt{2})]$

تمرين 11:

نعتبر الدالة f المعرفة بـــ :

$$f(x)=\frac{x}{x-1}$$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 - حدد مجموعة تعريف f D_f.

2 - حدد معدل تغيرات f.

3 - اعط جدول تغيرات f.

4 - بين أن $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$ لكل $x\in D_f$

5 - بين أن (C_f) هدلول حدد مركزه ومقارباه

6 - أنشئ المنحنى (C_f)

7 - لتكن g الدالة المعرفة بـــ :

$$g(x)=\frac{x}{|x|-1}$$

أ – حدد مجموعة تعريف الدالة g.

ب – بين أن g دالة فردية.

ج – بين أن $g(x)=f(x)$ لكل $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$

د – استنتج طريقة لانشاء (C_g) ثم أنشئ (C_g) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

هـــ – حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة :

$x-m|x|+m=0$ حيث $m\in\mathbb{R}$

الجواب :

1 - $x\in D_f$ يعني $x-1\neq 0$

يعني $x\neq 1$

إذن $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

2 - ليكن x و y من D_f بحيث $x\neq y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\frac{x}{x-1}-\frac{y}{y-1}}{x-y}$$

$$=\frac{x(y-1)-y(x-1)}{(x-y)(x-1)(y-1)}$$

$$=\frac{xy-x-yx+y}{(x-y)(x-1)(y-1)}$$

$$=\frac{-(x-y)}{(x-y)(x-1)(y-1)}$$

إذن $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{-1}{(x-1)(y-1)}$

3 - في المجال $]1,+\infty[$

لدينا $\begin{cases}x<1\\ y<1\end{cases}$ إذن

$\begin{cases}x-1<0\\ y-1<0\end{cases}$

ومنه $(x-1)(y-1)>0$

إذن $\frac{-1}{(x-1)(y-1)}\leqslant 0$

وبالتالي f تناقصية على المجال $]1,+\infty[$

وبنفس الطريقة f تناقصية على $]-\infty,1[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

4 - ليكن $x \in D_f$

$$1+\frac{1}{x-1}=\frac{x-1+1}{x-1}$$
$$=\frac{x}{x-1}$$

إذن $f(x)=1+\frac{1}{x-1}$ لكل $x \in D_f$

5 - معادلة (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي

$y=f(x)$

يعني $y=1+\frac{1}{x-1}$

يعني $y-1=\frac{1}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-1 \end{cases}$

المعادلة (C_f) تصبح $Y=\frac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

حيث $\Omega(1\,,1)$

ومنه (C_f) هذلول مركزه $\Omega(1\,,1)$ ومقارباه

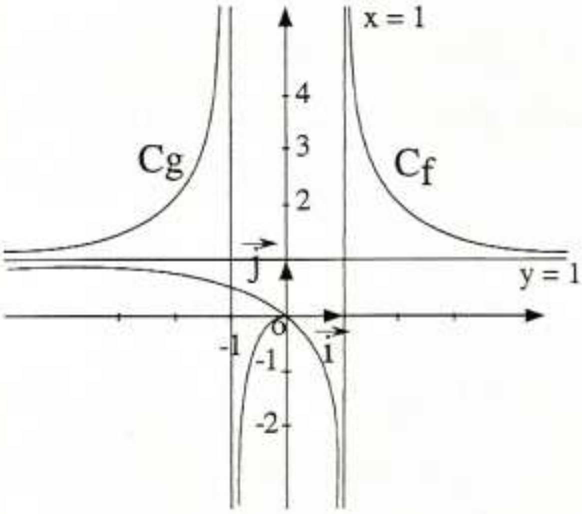
المستقيمان $x=1$ و $y=1$

<u>طريقة 2 :</u>

(C_f) هذلول مركزه $\Omega(\frac{1}{1},\frac{1}{1})$ أي

$\Omega(1\,,1)$ ومقارباه $x=1$ و$y=1$

6 -



7 - لدينا $g(x)=\frac{x}{|x|-1}$

أ – $x \in D_g$ يعني $|x|-1 \neq 0$

يعني $|x| \neq 1$

يعني $x \neq 1$ و $x \neq -1$

وبالتالي $D_g=\mathbb{R}-\{-1\,,1\}$

ب – $x \in D_g$ يعني $x \neq 1$ و $x \neq -1$

يعني $-x \neq -1$ و $-x \neq 1$

يعني $-x \in D_g$

إذن لكل $x \in D_g$ لدينا $-x \in D_g$

لدينا

$$g(-x)=\frac{-x}{|-x|-1}$$
$$=\frac{-x}{|x|-1}$$
$$g(-x)=-g(x)$$

ومنه g دالة فردية.

ج – ليكن $x \in D_g$ بحيث $x \geqslant 0$

$$g(x)=\frac{x}{|x|-1}=\frac{x}{x-1}=f(x)$$

د – لدينا $g(x)=f(x)$ لكل

$x \in [0\,,1[\cup]1\,,+\infty[$

إذن $(C_g)=(C_f)$ في $[0\,,1[\cup]1\,,+\infty[$

وبما أن f فردية نتمم الرسم بإنشاء المماثل بالنسبة لأصل المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

هـ - $x - m\,|x| + m = 0$ يعني

$x = m\,(|x| - 1)$

يعني $\dfrac{x}{|x|-1} = m \quad (|x| \neq 1)$

يعني $g(x) = m$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (C_g) والمستقيم $y = m$

الحالة 1 : $m = 0$ هناك وحيد هو $x = 0$

الحالة 2 : $m < 0$ هناك حلين مختلفين.

الحالة 3 : $0 < m \leqslant 1$ ليس هناك حل.

الحالة 4 : $m > 1$ هناك حلان مختلفان.

تمرين 12:

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{-x+3}{x+1}$$

(C) التمثيل المبياني لـــ f في معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

2 - تحقق أن $f(x) = -1 + \dfrac{4}{x+1}$ لكل $x \in D_f$

3 - ليكن $\Omega\,(-1\,,-1)$ نقطة من (P).

a - بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ هي $Y = \dfrac{4}{X}$

b - أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

4 - اعط جدول تغيرات الدالة f

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بـــ :

$$g(x) = \frac{-|x|+3}{|x|+1}$$

a - أدرس زوجية الدالة g

b - أنشئ الدالة g في نفس المعلم $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$

c - اعط جدول تغيرات الدالة g.

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x+1 \neq 0$

يعني $x \neq -1$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{-1\,,1\}$

2 - لكل $x \in D_f$

$$-1 + \frac{4}{x+1} = \frac{-x-1+4}{x+1}$$

$$= \frac{-x+3}{x+1} = f(x)$$

وبالتالي $f(x) = -1 + \dfrac{4}{x+1}$ لكل $x \in D_f$

3 - a - معادلة (C_f) في المعلم $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ هي $y = f(x)$

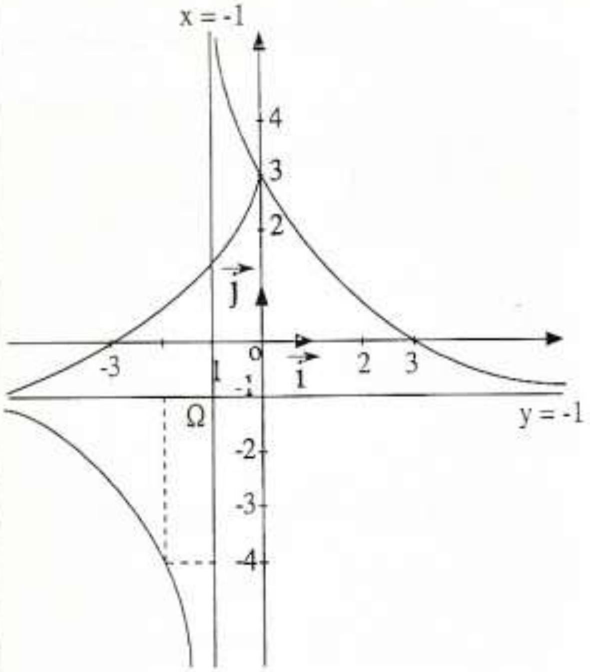
يعني $y = -1 + \dfrac{4}{x+1}$

يعني $y + 1 = \dfrac{4}{x+1}$

نضع $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y+1 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \dfrac{4}{X}$ في المعلم $(\Omega\,,\vec{i}\,,\vec{j})$ حيث $\Omega\,(-1\,,-1)$

b - (C_f) هدلول مركزه $\Omega\,(-1\,,-1)$ ومقارباه المستقيمان $x = -1$ و $y = -1$.



4 - جدول تغيرات f من خلال المنحنى فإن :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

5 - لدينا $g(x) = \dfrac{-|x| + 3}{|x| + 1}$

a - $x \in Dg$ يعني $|x| + 1 \neq 0$

يعني $|x| \neq -1$ وهذا دائما صحيح

إذن $Dg = \mathbb{R}$

لكل $x \in Dg$ لدينا $-x \in Dg$

$$g(-x) = \frac{-|-x|+3}{|-x|+1} = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} = g(x)$$

إذن g دالة زوجية.

b - لدينا g دالة زوجية إذن يكون (Cg) متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.

ننشئ (Cg) أولا على $[0 , +\infty[$ في هذا المجال

$$f(x) = \frac{-|x| + 3}{|x| + 1} = \frac{-x + 3}{x + 1} = f(x)$$

إذن (Cg) و (Cf) منطبقان على هذا المجال.

c - من خلال منحنى الدالة g فإن جدول تغيرات g هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	3	↘

تمرين 13:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بـــ :

$$f(x) = \frac{x - 2}{x}$$

و (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد وممنظم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

1 - حدد Df وتحقق أن لكل $x \in Df$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x}$$

2 - ليكن $\Omega(0 , -1)$ في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

بين أن معادلة (C) في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$ هي

$$Y = \frac{-2}{X}$$

3 - أنشئ (C) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

4 - اعط جدول تغيرات f.

5 - نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي :

$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x}$$

أ – أدرس زوجية الدالة g

ب – أنشئ (Cg) في نفس المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

مستعملا منحنى الدالة f.

ج – اعط جدول تغيرات g.

الجواب :

1 - لدينا $f(x) = \frac{x - 2}{x}$

$x \in D_f$ يعني $x \neq 0$

ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

لدينا كذلك $1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x} = f(x)$

ومنه $f(x) = 1 - \frac{2}{x}$ لكل $x \in D_f$

2 - معادلة (C_f) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

يعني $y = 1 - \frac{2}{x}$

يعني $y - 1 = \frac{-2}{x}$

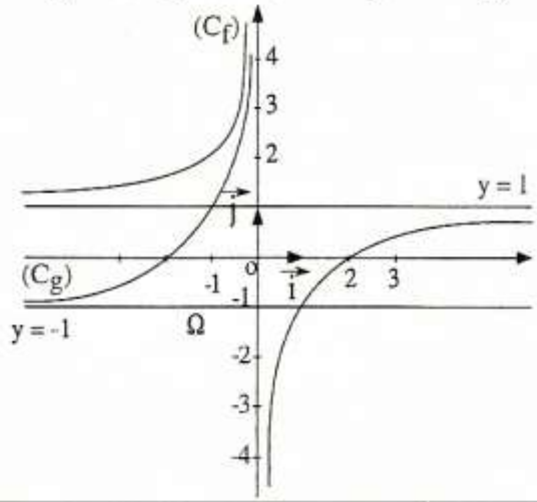
نضع $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{-2}{X}$ في المعلم $(\Omega , \vec{i} , \vec{j})$

حيث $\Omega(0 , -1)$.

3 - (C_f) عبارة عن هذلول مركزه $\Omega(0 , -1)$

ومقارباه المستقيمان $x = 0$ و $y = 1$.



4 - جدول تغيرات f

حسب منحنى f فإن

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↗	‖	↗

5 - لدينا $g(x) = \frac{|x| - 2}{x}$

$x \in D_g$ يعني $x \neq 0$

ومنه $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

لكل $x \in D_g$ لدينا $-x \in D_g$

$$g(-x) = \frac{|-x| - 2}{-x} = \frac{|x| - 2}{-x} = -\frac{|x| - 2}{x}$$
$$= -g(x)$$

إذن g دالة فردية.

ب – لدينا g دالة فردية إذن (C_g) متماثل بالنسبة لأصل المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

في المجال $]0 , +\infty[$ لدينا :

$$g(x) = \frac{|x| - 2}{x}$$
$$= \frac{x - 2}{x}$$

$g(x) = f(x)$

إذن (C_f) و(C_g) منطبقان في المجال $]0 , +\infty[$

ثم نتمم الرسم بإنشاء المماثل بالنسبة لأصل المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

ج – جدول تغيرات g.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g(x)	↗	‖	↗

تمرين 14:

لتكن الدالة f و g المعرفين بما يلي :

$g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ و $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(C_f) و(C_g) هما المنحنيان الممثلان لـ f و g

المعلم المتعامد والممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ و$\Omega(1\,,\,1)$

نقطة من (P)

1 - حدد معادلتي (C_f) و (C_g) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

2 - أنشئ (C_f) و (C_g) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

3 - لتكن الدالة h المعرفة بما يلي :

$h(x) = x^2 - 2x + 2 + \dfrac{x}{1-x}$

أدرس مبيانيا إشارة الدالة $h(x)$.

الجواب :

1 - معادلة (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني $y = x^2 - 2x + 2$

يعني $y = x^2 - 2x + 1 + 1$

يعني $y - 1 = (x-1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

معادلة (C_f) تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

حيث $\Omega(1\,,\,1)$.

معادلة (C_g) في المعلم $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$ هي :

$y = g(x)$

يعني $y = \dfrac{x}{x-1}$

يعني $y = \dfrac{x-1+1}{x-1}$

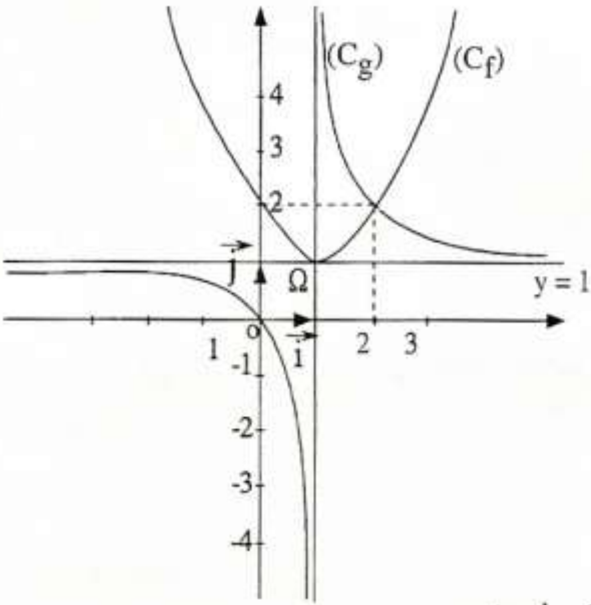
يعني $y = 1 + \dfrac{1}{x-1}$

يعني $y - 1 = \dfrac{1}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \dfrac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

2 - (C_f) شلجم رأسه $\Omega(1\,,\,1)$ وموجه نحو الأعلى (C_g) هذلول مركزه $\Omega(1\,,\,1)$ ومقارباه المستقيمان $x = 1$ و $y = 1$.



3 - لدينا

$h(x) = x^2 - 2x + 2 + \dfrac{x}{1-x}$

$= x^2 - 2x + 2 - \dfrac{x}{x-1}$

$h(x) = f(x) - g(x)$

$h(x) \geqslant 0$ يعني $f(x) - g(x) \geqslant 0$

يعني $f(x) \geqslant g(x)$

يعني x توجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق (C_g).

إذن :

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$		
h(x)	+	- 0	+

تمرين 15:

نعتبر الدالة المعرفة بـــ :

$$g(x) = \frac{x-2}{x-1}$$

1 - تحقق أن :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad \text{لكل} \quad x \in D_f$$

2 - أ – أحسب معدل تغيرات f.

ب – اعط جدول تغيرات f.

3 - أ – بين أن (C_f) هذلول محددا عناصره المميزة.

ب – أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - حل مبيانيا المتراجحة $f(x) > 0$

5 - نعتبر الدالة المعرفة بـــ :

$$g(x) = x^2 - 2x + 3$$

أ – بين أن (C_g) عبارة عن شلجم حدد عناصره المميزة.

ب – أنشئ (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ج – حل مبيانيا المتراجحة $\frac{g(x)}{f(x)} > 0$

(α هو حل المعادلة $g(x) = f(x)$ غير مطلوب تحديده).

الجواب :

1 - لدينا

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} = f(x)$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad \text{لكل} \quad x \in D_f$$

2 - أ - ليكن x و y من D_f بحيث $x \neq y$

لدينا :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{\frac{x-2}{x-1} - \frac{y-2}{y-1}}{x-y}$$

$$= \frac{(x-2)(y-1)-(x-1)(y-2)}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$= \frac{xy - x - 2y + 2 - xy + 2x + y - 2}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$= \frac{x-y}{(x-1)(y-1)(x-y)}$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1}{(x-1)(y-1)}$$

ب – في المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

لدينا $\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ y - 1 > 0 \end{cases}$

ومنه $(x-1)(y-1) > 0$

إذن $\frac{1}{(x-1)(y-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]1 , +\infty[$

في المجال $]-\infty , 1[$ لدينا :

$$\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}$$

إذن $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ y - 1 < 0 \end{cases}$

إذن $(x - 1)(y - 1) > 0$

ومنه $\frac{1}{(x-1)(y-1)} > 0$

وبالتالي f تزايدية على المجال $]-\infty , 1[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↗

3 - أ – معادلة (C_f) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ هي :

$$y = f(x)$$

يعني $y = 1 - \frac{1}{x-1}$

يعني $y - 1 = -\frac{1}{x-1}$

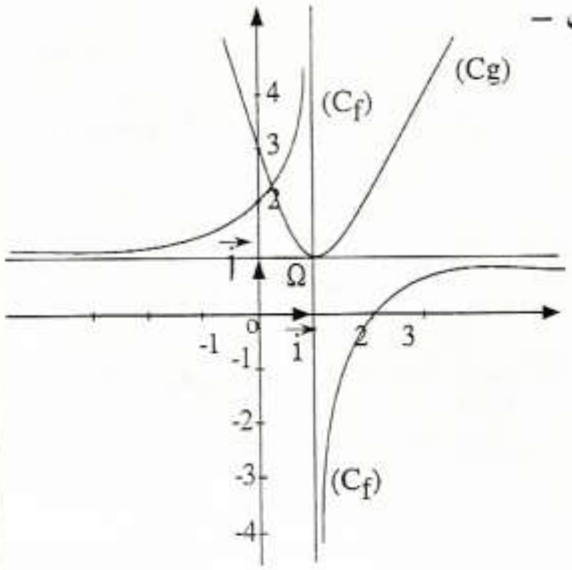
نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{-1}{X}$ في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

حيث $\Omega(1 , 1)$.

وبالتالي (C_f) هذلول مركزه Ω ومقارباه المستقيمان $x = 1$ و $y = 1$.

ب –



4 - $f(x) > 0$ يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (C_f) فوق محور الأفاصيل.

$$S =]-\infty , 1[\cup]2 , +\infty[$$

5 - أ – معادلة (C_g) في المعلم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

هي $y = f(x)$

يعني $y = x^2 - 2x + 3$

يعني $y = x^2 - 2x + 1 + 2$

يعني $y = (x - 1)^2 - 2$

يعني $y - 2 = (x - 1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

حيث $\Omega'(1 , 1)$.

إذن (C_g) شلجم رأسه Ω' موجه نحو الأعلى ومحور تماثله المستقيم $x = 1$

طريقة 2 :

(C_g) شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{2}{2}, g(1)\right)$ أي

$\Omega(1, 1)$

ج – $\frac{g(x)}{f(x)} > 1$ يعني $\frac{g(x)}{f(x)} - 1 > 0$

يعني $\frac{g(x) - f(x)}{f(x)} > 0$

جدول الإشارة

x	$-\infty$	α		1		2		$+\infty$
$g(x) - f(x)$	+	0	-	‖	+		+	
$f(x)$	+		+	‖	-		+	
$\frac{g(x) - f(x)}{f(x)}$	+	0	-	‖	-		+	

وبالتالي : $S =]-\infty, \alpha[\cup]2, +\infty[$

تمرين 16:

لتكن f و g الدالتين المعرفتين بـــ :

$g(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$ و $f(x) = x^2 - 2x + 3$

(C) و (C') منحنياهما على التوالي في معلم متعامد وممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - أحسب $f(0)$; $f(2)$; $g(2)$

2 - حدد زوج احداثيتي كل من نقط تقاطع (C') مع محوري المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3 - أثبت أن $Y = X^2$ و $Y = \frac{1}{X}$ هما معادلتان ديكارتيتان لــ (C) و (C') على التوالي في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\vec{O\Omega} = \vec{i} + 2\vec{j}$

4 - أنشئ (C) و (C')

5 - حل مبيانيا المتراجحة :

$g(x) - f(x) \leqslant 0$

6 - ناقش تبعا لقيم عدد حلول المعادلة :

$$x^2 - 2x + 3 - m = 0 \quad (E)$$

7 - نعتبر الدالة h المعرفة بــ :

$$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$$

أ – بين أن h دالة زوجية.

ب – بين أن لكل $x \leqslant 0$ $h(x) = f(x)$

ج – استنتج تغيرات الدالة h

الجواب :

1 - لدينا :

$f(0) = 3$ $f(2) = 3$ $g(2) = 3$

2 - التقاطع مع محور الأفاصيل

$g(x) = 0$ يعني $\frac{2x - 1}{x - 1} = 0$

يعني $2x - 1 = 0$

يعني $x = \frac{1}{2}$

إذن (C') يقطع محور الأفاصيل في $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

(C') يقطع محور الأراتيب في $B(0, g(0))$

أي $B(0, 1)$

3 - معادلة (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني $y = x^2 - 2x + 3$

يعني $y = x^2 - 2x + 1 + 2$

يعني $y - 2 = (x - 1)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = X^2$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1 , 2)$ أي $\vec{O\Omega} = \vec{i} + 2\vec{j}$

– معادلة (C') في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = g(x)$$

يعني $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

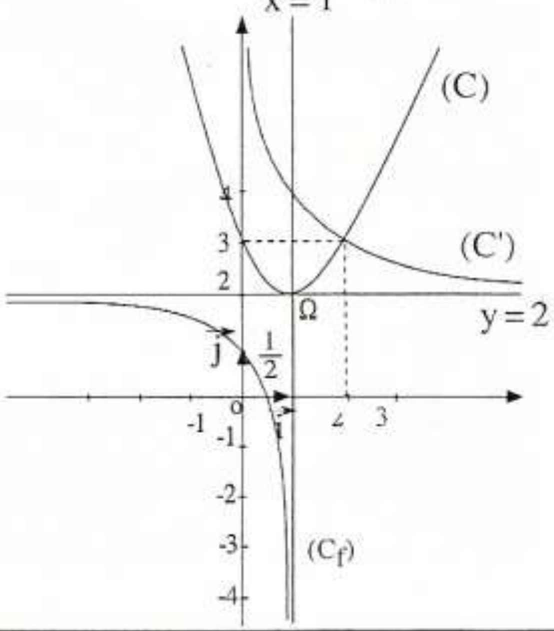
يعني $y = \dfrac{2(x - 1) + 1}{x - 1}$

يعني $y = 2 + \dfrac{1}{x - 1}$

يعني $y - 2 = \dfrac{1}{x - 1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \dfrac{1}{X}$ في المعلم $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$



5 - $g(x) - f(x) \leqslant 0$ يعني $g(x) \leqslant f(x)$

يعني x يوجد في المجال الذي يكون فيه (Cg) تحت (Cf).

إذن $S =]-\infty , 1[\cup]2 , +\infty[$

6 - $x^2 - 2x + 3 - m = 0$

يعني $x^2 - 2x + 3 = m$

يعني $f(x) = m$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (Cf) مع المستقيم الذي معادلته $y = m$.

إذا كان $m = 2$ هناك حل وحيد.

إذا كان $m > 2$ هناك حلان مختلفان.

إذا كان $m < 2$ ليس هناك حل.

7 - لدينا :

$$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$$

أ – لدينا

$$D_h = \mathbb{R}$$

لكل $x \in D_h$ لدينا $-x \in D_h$

$$h(-x) = (-x)^2 + 2|-x| + 3$$
$$= x^2 + 2|x| + 3$$
$$h(-x) = h(x)$$

إذن h دالة زوجية

ب – لكل $x \leqslant 0$ لدينا $|x| = -x$

$$h(x) = x^2 + 2|x| + 3$$
$$= x^2 - 2x + 3$$

إذن $h(x) = f(x)$ لكل $x \leqslant 0$

ج – جدول تغيرات h.

لدينا $f = h$ في $]-\infty , 1]$ إذن h و f لهما نفس التغيرات على $]-\infty , 0]$

إذن h تناقصية على $]-\infty , 0]$ وبما أنها زوجية فإن h تزايدية على $[0 , +\infty[$

تمرين 17:

لتكن الدالة f المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 \quad 4}$$

1 - حدد D_f مجموعة تعريف f ثم ادرس زوجية f

2 - نضع $g(x) = f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^+ \cap D_f$

بين أن $g(x) = 1 - \dfrac{3}{x+2}$

3 - أ – حدد طبيعة (C_f) وعناصره المميزة.

ب – أنشئ (C_g) ثم استنتج (C_g) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

4 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة :

$$x^2(1 - m) - 3|x| + 2(1 + 2m) = 0$$

وذلك حسب قيم x

الجواب :

1 - $x \in D_f$ يعني $x^2 - 4 \neq 0$

يعني $x^2 \neq 4$

يعني $x^2 \neq 2$ و $x \neq -2$

ومنه $D_g = \mathbb{R} - \{-2 , 2\}$

لكل $x \in D_f$ لدينا $-x \in D_f$

$$f(-x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{(-x)^2 \quad 4} = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 \quad 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

إذن f دالة زوجية.

2 - لدينا : لكل $x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$ $|x| = -x$

$$g(-x) = \frac{x^2 - 3|x| + 2}{x^2 \quad 4} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 \quad 4} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2-3}{x+2}$$

إذن $g(x) = 1 - \dfrac{3}{x+2}$

3 - أ – لنحدد طبيعة (C_f)

معادلة (C_g) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$$y = g(x)$$

$$x \in D_f \cap \mathbb{R}^+$$

يعني $y = 1 - \dfrac{3}{x+2}$

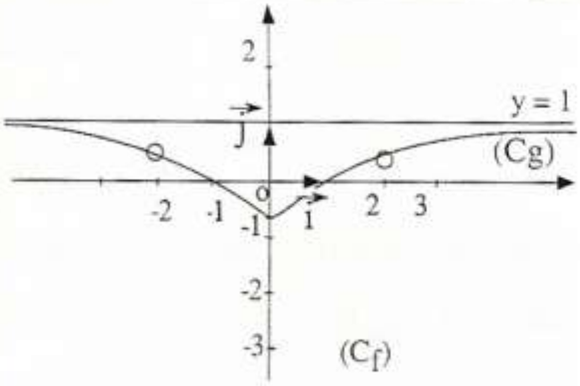
يعني $y - 1 = -\dfrac{3}{x+2}$

نضع $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - 1 \end{cases}$

معادلة (C_g) في $D_f \cap \mathbb{R}^+$ تصبح $Y = \dfrac{-3}{X}$

إذن (C_g) جزء من هذلول مركزه $\Omega(-2 , 1)$

ومقارباه $x = -2$ و $y = 1$.



4 -

$x^2(1-m) - 3|x| + 2(1+2m) = 0$

$x^2 - mx^2 - 3|x| + 2 + 4m = 0$

يعني $x^2 - 3|x| + 2 = m(x^2-4)$

$\frac{x^2 - 3|x| + 2}{(x)^2 \; 4} = m$ و $(|x| \neq 2)$

يعني $f(x) = m$

عدد حلول المعادلة هو عدد نقط تقاطع (Cf) والمستقيم $y = m$

إذا كان $m = -\frac{1}{2}$ هناك حل وحيد.

إذا كان $m < -\frac{1}{2}$ ليس هناك حل .

إذا كان $m = \frac{1}{4}$ ليس هناك حل.

إذا كان $-\frac{1}{2} < m < 1$ و $m \neq -\frac{1}{4}$ هناك حلين مختلفين

إذا كان $m \geqslant 1$ ليس هناك حل.

تمرين 18:

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$4x - x^2 = 2 + \frac{1}{x-1}$$

2 - أنشئ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المتعامد والممنظم المنحنيان (Cf) و (Cg) حيث :

$f(x) = 4x - x^2 \qquad g(x) = 2 + \frac{2}{x-1}$

وحدد احداثيتي نقط تقاطعهما.

3 - استنتج التمثيل المبياني للدالة h المعرفة بما يلي :

نضع

$$\begin{cases} h(x) = g(x) & x \in]-\infty , 0] \cup [2 , +\infty[\\ h(x) = f(x) & x \in]0 , 2[\end{cases}$$

4 - حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $h(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$

الجواب :

1 - مجموعة تعرف المعادلة $D : \mathbb{R} - \{2\}$

تكافئ $4x - x^2 = 2 + \frac{2}{x-1}$

تكافئ $4x - x^2 = \frac{2x - 2 + 2}{x-1}$

يعني $x(4-x)(x-1) = 2x$

يعني $x(4-x)(x-1) - 2x = 0$

يعني $x[(4-x)(x-1) - 2] = 0$

يعني $x[(4-x)(x-1) - 2] = 0$

يعني $(4-x)(x-1) - 2 = 0$ أو $x = 0$

يعني $4x - 4 - x^2 + x - 2 = 0$ أو $x = 0$

يعني $-x^2 + 5x - 6 = 0$ أو $x = 0$

بالنسبة للمعادلة $-x^2 + 5x - 6 = 0$

لدينا $\Delta = 25 - 4(-1) \times (-6) = 1$

إذن $x = \frac{-5+1}{-2} = 2$ أو $x = \frac{-5-1}{-2} = 3$

إذن $S = \{0, 2, 3\}$

2 - معادلة (Cg) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني $y = 2 + \frac{2}{x-1}$

يعني $y - 2 = -\frac{2}{x-1}$

نضع $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = \frac{2}{X}$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega(1, 2)$ إذن (Cf) هذلول مركزه

$\Omega(1, 2)$ ومقارباه $x = 1$ و $y = 2$

معادلة (Cf) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ هي :

$y = f(x)$

يعني $y = 4x - x^2$

يعني $y = -(x^2 - 4x)$

يعني $y = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$

يعني $y = -(x - 2)^2 + 4$

يعني $y - 4 = -(x - 2)^2$

نضع $\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 4 \end{cases}$

المعادلة تصبح $Y = -X^2$ في المعلم $(\Omega', \vec{i}, \vec{j})$

حيث $\Omega'(2, 4)$.

4 - لدينا $h(x) = m$ يعني x أفصول نقطة تقاطع

(C_h) مع المستقيم الذي معادلته

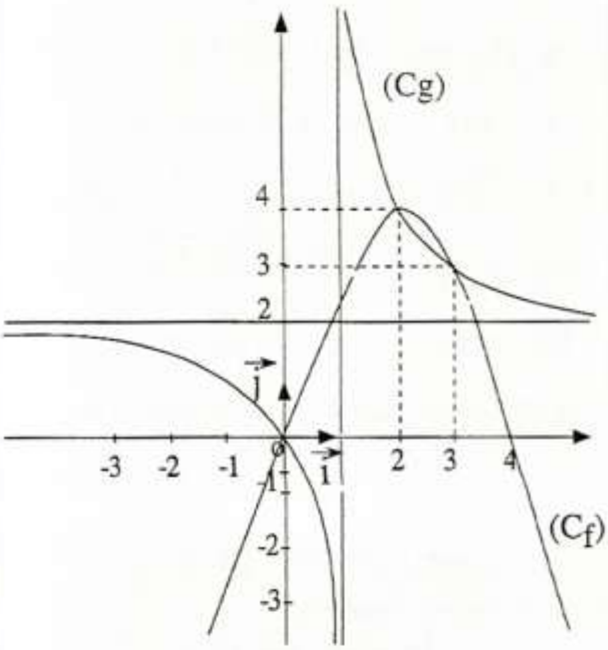
$(\Delta)\ y = m$

إذن :

- إذا كان $m = 2$ و $m = 4$ أو $m = 0$ هناك حل وحيد.

- إذا كان $m > 4$ أو $m < 0$ فإن $S = \phi$

- إذا كان $0 < m < 2$ أو $2 < m < 4$ هناك حلان مختلفان



3 -